9

העתקות חלקות בין יריעות חלקות

בגיאומטריה מודרנית חשוב מאוד להבין לא רק את האובייקטים (היריעות משיגים אותם), אלא גם את ההעתקות (המורפיזמים) ביניהם.

<u>הגדרה</u> תהיינה $(X,\mathcal{A})$ ו- $(Y,\mathcal{B})$ שתי יריעות דיפרנציאביליות (= חלקות), ממימדים m ו-n.

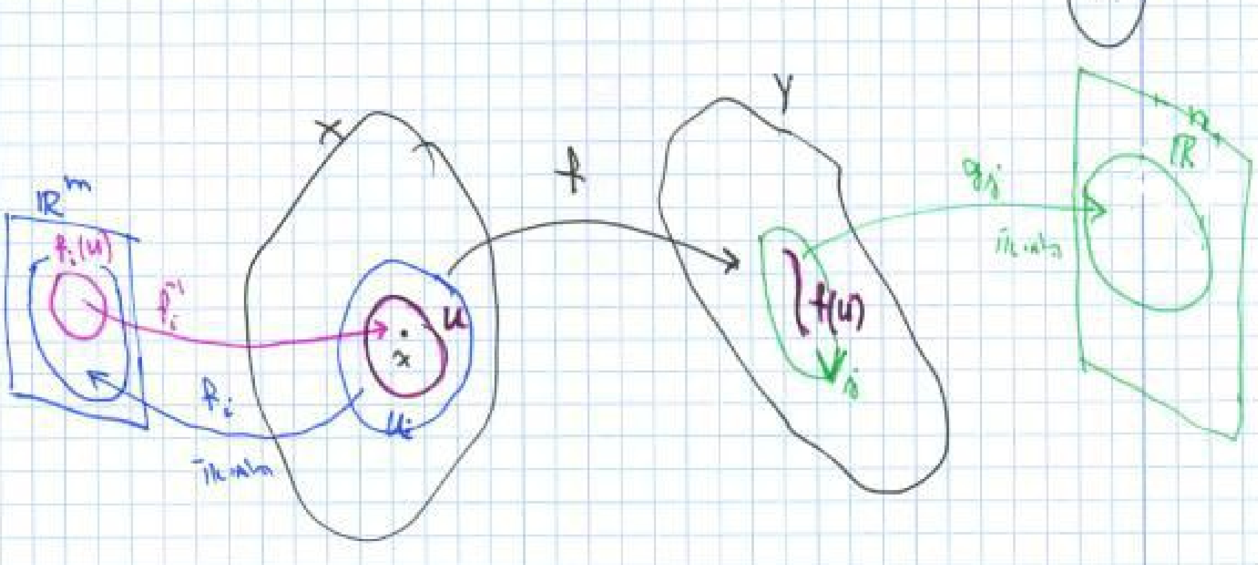
<u>העתקה חלקה</u> $f:(X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B})$ היא פונקציה רציפה $f:X\to Y$ אשר מקיימת את התנאי הבא. (נסמן $\mathcal{A}=\{(U_i,f_i)\}$ ו- $\mathcal{B}=\{(V_j,g_j)\}$.

תהי $x\in X$ נקודה כלשהי. אז יש סביבה פתוחה U של x, ואינדקסים i ו- j, כך ש: $U\subset U_i$, $f(U)\subset V_j$, והפונקציה המורכבת

$$f_i(U)\xrightarrow{(f_i|_U)^{-1}}U\xrightarrow{f|_U}V_j\xrightarrow{g_j}\mathbb{R}^n$$

הינה חלקה. (נזכיר כי $f_i(U)$ קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^m$)

[ציור בעמוד הבא]



כאן עובדים לגבי מורפיזמים חלקים בין יריעות חלקות (תאמר את ההגדרה למלא-בית!)

- אם $f:(X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B})$ ו- $g:(Y,\mathcal{B})\to(Z,\mathcal{C})$ מורפיזמים חלקים, אז גם ההרכבה $g\circ f$ הוא מורפיזם חלק $(X,\mathcal{A})\to(Z,\mathcal{C})$.

- יהיו A ו- A' שני אטלסים דיפרנציאביליים על מרחב טופ' X. נאמר כי $A\sim A'$ אם העתקת הזהות $\mathbb{1}_X:X\to X$ היא העתקה חלקה $\mathbb{1}_X:(X,A)\to(X,A')$. וגם $\mathbb{1}_X:(X,A')\to(X,A')$

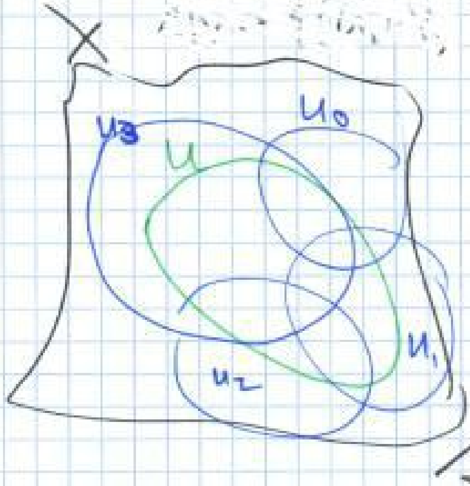
אז $\sim$ יחס שקילות.

- לדוגמה $\mathbb{R}$, כמרחב טופולוגי, יש מבנה של יריעה טופ' ממימד 1. האטלס הוא $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}:=\{(\mathbb{R},\mathbb{1}_{\mathbb{R}})\}$.
להשוות כי פונקציה חלקה $f:X\to\mathbb{R}$ היא בדיוק העתקה חלקה $(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$.

11

• בדומה, לכל $n \geq 0$ המרחב $\mathbb{R}^n$ הינו יריעה ד״פ. תהי $(X,\mathcal{A})$ יריעה ד״פ, ותהי $f: X \to \mathbb{R}^n$ פונקציה. נסמן ב- $t_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ את ההטלות (כלו׳ פונקציות הקואורדינטות). אז $f: (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n})$ העתקה ד״פ אמ״מ $t_i \circ f: (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$ פונקציה ד״פ לכל i.

• תהי $(X,\mathcal{A})$ יריעה ד״פ, ותהי $U \subset X$ קבוצה <u>פתוחה</u>. נסמן $\mathcal{A} = \{(U_i,f_i)\}$. נגדיר $\mathcal{A}|_U := \{(U_i \cap U, f_i|_{U_i \cap U})\}$. אז $(U, \mathcal{A}|_U)$ יריעה ד״פ, מאותו מימד כמו $(X,\mathcal{A})$. נקרא: <u>תת-יריעה</u> <u>פתוחה</u>.



• המושג <u>תת-יריעה</u> <u>שלמה</u> פחות מעניין אותנו כרגע. נחזור לזה אח״כ. רק בינתיים: $S^2 \subset \mathbb{R}^2$ היא תת-יריעה שלמה.

המרחב הפרויקטיבי $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

אתמול ציינו את המרחב $\mathbb{R}^n$ ב- $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, וקראנו לו המרחב האפיני ה- n ממדי מעל $\mathbb{R}$. זה יריעה דיפרנציאבילית ממימד n.

הגדרה. נגדיר יחס שקילות על הקבוצה $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})-\{0\}$ באופן הבא: $v_1\sim v_2$ אם יש $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, כך ש- $v_2=a\cdot v_1$.

המרחב הפרויקטיבי ה- n ממדי מעל $\mathbb{R}$ הוא

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}):=\frac{\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})-\{0\}}{\sim}$$

מרחב המנה, עם טופולוגיית המנה.

הערה: יחס השקילות הוא פעולה של החבורה הכפלית $G_m(\mathbb{R})$ על $\mathbb{A}^{n+1}-\{0\}$.

נזכיר כי אם X מרחב טופולוגי, ~ יחס שקילות על X, ו- $Y=X/\sim$ מרחב המנה, אז טופולוגיית המנה היא זו: קבוצה $V\subseteq Y$ היא פתוחה אם $\pi^{-1}(V)$ פתוחה ב- X. כאן $\pi:X\to Y$ העתקת הכיסוי.

טענה. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ מרחב האוסדורף קומפקטי.

ההוכחה היא תרגיל:

האוסדורפיות

תרגיל. 1) יהי X מרחב מטרי קומפקטי, ותהי G חבורה סופית של איזומטריות של X שהפעולה היא חופשית (כלומר לכל $x\in X$, המייצב של x ב- G הוא טריוויאלי). נגדיר $Y=X/G$, מרחב המנה. אז יש מטריקה על Y כך שהיא טופולוגית:

המתאימה היא הטופולוגיה המנה
ביחס ל- $\pi: X\to Y$ וכן Y האוסדורף
בנוסף X קומפקטי. (יותר מכך, π היא אוטומטית סגורה)

2) נתבונן במרחב המטרי הקומפקטי S^n,
המוכל ב- $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})-\{0\}$. יש העתקה של
$\pi: S^n\to P^n(\mathbb{R})$. ואכן חבורה סופית G עם כלל החילוף $\pm$,
כך ש: $P^n(\mathbb{R})\cong S^n/G$. להראות שהטופולוגיות המנה
על $P^n(\mathbb{R})$ ביחס לצמצום $S^n\to P^n(\mathbb{R})$ ול-
$\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})-\{0\}\to P^n(\mathbb{R})$ זהות. להשלים בסוף 1.

כיסוי $\pi: X\to Y$ אוניברסלי
רציפה ועל ולכל $x\in X$ יש
סביבה פתוחה U כך ש- $\pi(U)$ פתוחה
ו- $\pi|_U: U\to \pi(U)$
הומיאומורפיזם (כאן הומיאומורפיזם
לא מחייבים מקומית).

$P^n(\mathbb{R})$ כיריעה דיפרנציאבילית

יהיו $t_0,\dots,t_n$ הקואורדינטות של
$\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n+1}$. (א. טענה זה אקלידי; במרחב
הקרטזי). פונקציות אלו נקראות <u>הקואורדינטות</u>
<u>ההומוגניות</u> של $P^n(\mathbb{R})$. בהינתן $x\in P^n(\mathbb{R})$
נבחר הרמה שלה $\tilde{x}\in\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})-\{0\}$; כלומר
$\pi(\tilde{x})=x$. נקבל סדרת מספרים

$$(a_0,\dots,a_n):=(t_0(\tilde{x}),\dots,t_n(\tilde{x})).$$

הרמה אחרת, נאמר $\tilde{x}'$, תיתן סדרה $(a_0',\dots,a_n')$.
כמובן ש: $(a_0',\dots,a_n')=(aa_0,\dots,aa_n)$ עבור $a\neq 0$.
מחלקת השקילות הנ"ל מסומנת ב:

$$(a_0:a_1:\dots:a_n).$$

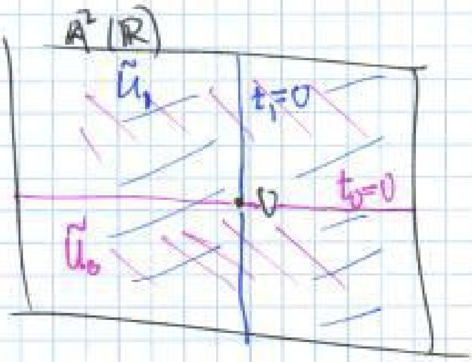
עבור נקודה $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, התנאי
$$t_i(\tilde{x}) = 0$$
אינו תלוי בבחירת הנקודה $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. לכן נכתוב פשוט $t_i(x)=0$.
נגדיר את הקבוצה
$$U_i := \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid t_i(x) \neq 0\}.$$

טענה U_i קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, ו-
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i.$$

הוכחה. $\tilde{U}_i := \pi^{-1}(U_i) = \{\tilde{x} \in \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \mid t_i(\tilde{x}) \neq 0\}$
קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$.
וברור כי
$$\mathbb{A}^{n+1} - \{0\} = \bigcup_{i=0}^{n} \tilde{U}_i.$$

עד כאן 23/12

$n=1$



הגדרה. העתקה
$$f_i: U_i \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$$
$$f_i(a_0 : \cdots : a_n) \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$
מוגדרת היטב, והיא הומאומורפיזם.