# מכפלות טנזוריות
## (Tensor products)

**הגדרה.** יהיו $M$, $N$ ו- $P$ שלושה $A$-מודולים.
**פונקציה $A$-בילינארית**

$$\beta : M \times N \to P$$

היא פונקציה שמקיימת את התנאים הבאים:

- $\beta(m_1+m_2, n) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n)$
- $\beta(am, n) = a \cdot \beta(m,n)$
- $\beta(m, n_1+n_2) = \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2)$
- $\beta(m, an) = a \cdot \beta(m,n)$

לכל $a \in A$, $m, \ldots \in M$ ו- $n, \ldots \in N$.

**הגדרה.** מכפלה טנזורית של $M$ ו-$N$ היא זוג $(T, \beta)$ שבו $T$ הוא $A$-מודול, ו- $\beta : M \times N \to T$ פונקציה $A$-בילינארית.
הזוג $(T, \beta)$ צריך להיות אוניברסלי במובן הבא:
בהינתן מודול $P$, ופונקציה $A$-בילינארית $\gamma : M \times N \to P$,
יש $A$-מודולוס רק אחד ויחיד $\varphi : T \to P$
יש $A$-מודולוס רק $\gamma = \varphi \circ \beta$.

(62) **טענה.** המכפלה הטנזורית $(T, \beta)$
של $M$ ו-$N$, אם היא קיימת, היא
יחידה עד כדי איזומורפיזם יחיד.
(ההוכחה בדיוק כמו עבור המכפלה הקרטזית.)

**טענה.** המכפלה הטנזורית של $M$ ו-$N$
קיימת.

**הוכחה.** יהי $F$ ה-$A$-מודול החופשי
על בסיס הקבוצה $M \times N$. נגדיר תת-מודול $R$
של $F$ אשר נוצר ע"י האיברים מהסוג הבא:

$$\left\{\begin{array}{l} (m_1+m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) \\ (am, n) - a\cdot(m, n) \\ (m, n_1+n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) \\ (m, an) - a\cdot(m, n) \end{array}\right.$$

נגדיר $T := F/R$. זהו $A$-מודול.

נגדיר $\beta(m,n) := (m,n) + R \in T$.

זוהי פונקציה בילינארית $\beta : M \times N \to T$.

לתרגיל: לבדוק שיש לזוג $(T, \beta)$
את התכונה האוניברסלית; זה לא קשה לבדוק. $\square$

סימון: בהינתן מודולים $M$ ו-$N$ נסמן את המכפלה הטנזורית שלהם$_A$ כך: המודול $T$
$(T, \beta)$
ונסמן רק: $M \otimes_A N$ ; וההעתקה $\beta$ יסומן כך:
$m \otimes n := \beta(m,n)$.

6

תרגיל. א) אם $M$ ו-$N$ נוצרים סופית
אז גם $M\otimes_A N$ נוצר סופית.

ב. אם $M$ ו-$N$ $A$-מודולים חופשיים
מדרגה $r$ ו-$s$ הוכיחו אז $M\otimes_A N$
חופשי מדרגה $rs$. ($r$ ו-$s$ מונים כלשהם,
זה בוודאי סופיים!!)

ג. ניקח $A:=\mathbb{Z}$, $M:=\mathbb{Z}/(5)$,
$N:=\mathbb{Z}/(12)$. מהו $M\otimes_{\mathbb{Z}}N$?
(כמה שוברים יש ב-$M\otimes_{\mathbb{Z}}N$?)

ד. יהי $P$ $A$-מודול חופשי [מדרגה סופית].
נגדיר פונקטור $F:\underline{\mathrm{Mod}}\,A\to\underline{\mathrm{Mod}}\,A$
כך: $FM:=P\otimes_A M$ ו-
$F(\varphi:M\to N)(p\otimes m):=p\otimes\varphi(m)$.
להראות ש-$F$ פונקטור. אדיטיבי? לינארי?

ה. יהי $A\to B$ הומו' של חוגים. להראות
שיש פונקטור אדיטיבי $F:\underline{\mathrm{Mod}}\,A\to\underline{\mathrm{Mod}}\,B$ כך ש-
$FM=B\otimes_A M$.

$\mathbb{1}\to GF$

(ב) יהי $G:\underline{\mathrm{Mod}}\,B\to\underline{\mathrm{Mod}}\,A$. תגדירו טרנס' טבעית
של פונקטורים מ-$\underline{\mathrm{Mod}}\,A$ לעצמה.

# מכפלה טנזורית של אלגברות

**טענה:** יהי $A$ חוג, ויהיו $B$ ו-$C$ שתי $A$-אלגברות (הכל קומוטטיבי). אז יש מבנה יחיד של $A$-אלגברה על המודול $B\otimes_A C$, עם כפל שמקיים

$$(b_1\otimes c_1)\cdot(b_2\otimes c_2) = b_1b_2\otimes c_1c_2$$

ויחידה $1_B\otimes 1_C$.

זה לא קשה, אבל יש הרבה מה לבדוק...
(הוכחה: ראה ספרים באלג' קומ'.)

נתבונן בפונקציות

$$f: B\to B\otimes_A C$$
$$g: C\to B\otimes_A C$$

ו-
המוגדרות ע"י

$$f(b) := b\otimes 1$$
$$g(c) := 1\otimes c$$

ו-

אלו הומ' של $A$-אלגברות.

נסמן ב- $Alg(A)$ את הקטגוריה של $A$-אלגברות (קומוטטיביות). המורפיזמים הם בדיוק את ההומ'.

<u>טענה</u>. יהי $A$ חוג, ויהיו $\underline{Alg}(A) \ni B,C,D$

ויהיו $f':B\to D$ ו- $g':C\to D$

הומ׳ ב- $\underline{Alg}(A)$. אזי יש הומ׳ יחיד

$h: B\otimes_A C\to D$ ב- $\underline{Alg}(A)$

כך ש- $h\circ f=f'$ ו- $h\circ g=g'$.

* $B\otimes_A C$ הוא הקו-מכפלה של $B$ ו- $C$ ב- $\underline{Alg}(A)$ *

$$\begin{tikzcd}
B\otimes_A C \arrow[rrd, dashed, bend left, "\exists! h"] & & \\
B \arrow[u, "f"] \arrow[rr, bend right, "f'"'] & C \arrow[lu, "g"'] \arrow[r, "g'"] & D
\end{tikzcd}$$

<u>הוכחה</u>. הפונקציה $\beta: B\times C\to D$

$\beta(b,c) := f'(b)\cdot g'(c)$

היא $A$- בילינארית. לכן יש הומ׳ יחיד

של $A$-מודולים $h: B\otimes_A C\to D$

כך ש- $h(b\otimes c)=\beta(b,c)$.

בודקים כי $h$ הוא של $A$-אלגבראות.

$\square$

תרגיל.

א. חוג הפולינומים $A[t_1,\dots,t_n]$ ב- n משתנים.
הגדרה: כ- $A$ מודול זה המודול החופשי על ~~הקבוצה~~ הקבוצה
$$\{t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}\} \cong \mathbb{N}^n .$$
הכפל מוגדר על מונומים כך:
$$(t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n})\cdot(t_1^{j_1}\cdots t_n^{j_n}) := t_1^{i_1+j_1}\cdots t_n^{i_n+j_n}$$
ומורחב לכל המודול ע"י בילינאריות.

להראות כי $A[t_1]\otimes_A A[t_2] \cong A[t_1,t_2]$
ב- $\mathrm{Alg}(A)$. להסיק מסקנה דומה עבור $n\geq 3$.

ב. לחשב את החוג $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.
(רמז: זה איננו תחום שלמות. למצוא אידמפוטנטים:
אידמפוטנטים $e_1,e_2$ כך ש- $1=e_1+e_2$, $e_i^2=e_i$,
$e_1e_2=0$.)

ג. יהי $\mathbb{F}_p$ השדה הסופי $\mathbb{F}_p$. $K:=\mathbb{F}_p(t)$, פונקציות רציונליות במשתנה $t$
$L:=K[\sqrt[p]{t}]$,
או בדרך יותר מפורשת: $L:=K[s]/(s^p-t)$
כאשר $s$ הוא משתנה. לחשב את החוג $L\otimes_K L$.
(רמז: למצוא איבר (נילפוטנטי) $\varepsilon$ ב- $L\otimes_K L$ שעבורו $\varepsilon^p=0$.)

# חוגים נתריאניים

<u>הגדרה</u> חוג $A$ נקרא <u>נתריאני</u> (noetherian) אם כל אידאל ב-$A$ הוא נוצר סופית.
[הכל קומפקטי!]

<u>למה</u> יהי $A$ חוג נתריאני.
1) יהי $\mathfrak{a} \subset A$ אידאל. אז החוג $A/\mathfrak{a}$ נתריאני.
2) תהי $S \subset A$ קבוצה סגורה כפלית, אז החוג $A_S$ נתריאני.

<u>הוכחה</u>. 1) ניקח אידאל $\bar{\mathfrak{b}} \subset \bar{A} := A/\mathfrak{a}$.
נתבונן בהטלה, $\pi : A \to \bar{A}$, ונגדיר $\mathfrak{b} := \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$. אז $\bar{\mathfrak{b}} = \bar{A} \cdot \mathfrak{b}$.
לפי ההנחה $\mathfrak{b}$ נוצר סופית כ-$A$ מודול. לכן $\bar{\mathfrak{b}}$ נוצר סופית כ-$\bar{A}$-מודול.

2) נתבונן בהעתקה $\lambda : A \to A_S$. ניקח אידאל $\mathfrak{b} \subset A_S$. אז, כמו שראינו קודם אידאל
$\mathfrak{b} \cdot \lambda^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$. והאידאל $\lambda^{-1}(\mathfrak{b})$ נוצר סופית כ-$A$, ולכן $\mathfrak{b}$ נוצר סופית
כ-$A_S$. $\square$

<u>דוגמאות</u>
א. $\mathbb{Z}$ נתריאני. (חוג ראשי).
ב. $\mathbb{k}[t]$ נתריאני. (חוג ראשי)
ג. $\mathbb{k}[t_1, t_2, t_3, \ldots]$ (פולינומים ב-$\aleph_0$ משתנים) <u>לא</u> נתריאני - האידאל $(t_1, t_2, \ldots)$ איננו נוצר סופית.
ד. $X = [0,1]$ (הקטע הסגור ב-$\mathbb{R}$), $A := \{X \to \mathbb{R}$ רציפות$\}$.
$A$ לא נתריאני.

## משפט הבסיס של הילברט (Hilbert basis thm.)

יהי $A$ חוג נתרייני. אז חוג הפולינומים $A[t]$ נתרייני.

(הוכחה: בכל ספר על אלג' קומ')

**הגדרה.** יהי $A$ חוג ויהי $B$ $A$-אלגברה. אומרים כי $B$ היא $A$-אלגברה נוצרת סופית (fin. gen. $A$-algebra) אם יש איברים $b_1,\dots,b_n$ כך שכל איבר $b$ ב-$B$ ~~ניתן~~ ניתן לרשום כ: $b=f(b_1,\dots,b_n)$ עבור פולינום $f(t_1,\dots,t_n)\in A[t_1,\dots,t_n]$.

**טענה:** יהי $A$ חוג, ויהי $B$ $A$-אלגברה. בהינתן סדרת איברים $\underline{b}=(b_1,\dots,b_n)$ ב-$B$, יש הומ' יחיד של $A$-אלגברות

$$g: A[t_1,\dots,t_n]\to B$$

כך ש- $g(t_i)=b_i$.

הוכחה: תרגיל.

לפי הטענה, רואים כי $B$ היא $A$-אלגברה נוצרת סופית אם"ם $B$ מנה של החוג $A[t_1,\dots,t_n]$ עבור $n$ טבעי.

**מסקנה** (ממשפט הילברט). אם $A$ חוג נתרייני ו- $B$ היא $A$-אלגברה נוצרת סופית, אז $B$ חוג נתרייני.

הוכחה: באינדוקציה, $A[t_1,\dots,t_{n-1}][t_n]=A[t_1,\dots,t_n]$ חוג נתרייני. וראינו כי מנה של חוג נת' היא נת'. ∎

טא

**הגדרה.** $A$-מודול $M$ נקרא **נתריאני** אם כל תת-מודול $M'$ של $M$ נוצר סופית.

**טענה.** יהי $A$ חוג נתריאני, ויהי $M$ $A$-מודול נוצר סופית. אז $M$ הוא $A$-מודול נתריאני.

**הוכחה.** (בספרות).

## שאלה

תהי $K \subset L$ הרחבת שדות (כלומר הומ׳ של חוגים $K \to L$; זה תמיד ~~אחד~~ אינג׳קטיבי)

אומרים כי $L$ הרחבת שדות **נוצרת סופית** של $K$ אם יש איברים $b_1, \dots, b_n \in L$ כך שכל איבר $b \in L$ ניתן לרשום כ:

$$b = \frac{f(b_1, \dots, b_n)}{g(b_1, \dots, b_n)}$$

עבור פולינומים $f, g \in K[t_1, \dots, t_n]$ כך ש- $g(b_1, \dots, b_n) \neq 0$.

במילים אחרות, $L$ הוא שדה השברים של ~~A~~ $K$-אלגברה נוצרת סופית $L \supset B$. (שהיא
$B := K[b_1, \dots, b_n]$.

הרחבת ~~הש~~ $K\subset L$ נקראת <u>סופית</u> (finite)
אם $[L:K]:=\operatorname{rank}_K L<\infty$.

הרחבה $K\subset L$ נקראת <u>אלגברית</u> (algebraic)
אם כל איבר $b\in L$ ~~הוא~~ הינו אלגברי מעל $K$.
~~כאשר~~ נזכיר כי $b$ אלגברי מעל $K$ אם יש פולינום
$0\neq f(t)\in K[t]$ כך ש- $f(b)=0$.

<u>עובדה</u>: הרחבת ~~סופית~~ שדות $K\subset L$ היא
אלגברית אמ"מ $L=\bigcup_{i\in I}L_i$ כאשר $K\subset L_i$
הרחבה סופית לכל אינדקס $i$. ($I$ יכולה להיות
קבוצה אינסופית)

<u>הגדרה</u>. יהי $K\subset L$ הרחבת שדות, ~~יהי~~
1. סדרת איברים $(b_1,\dots,b_n)\subset L$ נקראת <u>בלתי
תלויה אלגברית</u> מעל $K$ אם הה"מ של $K$-אלגברות
$$\varphi: K[t_1,\dots,t_n]\to L$$
$$\varphi(t_i):=b_i$$
הוא אינג'קטיבי.
2. קבוצה $S\subset L$ נקראת <u>בלתי תלויה אלגברית</u>
מעל $K$ אם כל סדרה סופית $(b_1,\dots,b_n)$ של איברים
<u>שונים</u> ב- $S$ היא בת"א מעל $K$.

<u>הגדרה</u>. יהי $K\subset L$ הרחבת שדות. <u>בסיס טרנסצנדנטיות</u>
(transcendency basis) של $L$ מעל $K$ היא
קבוצה $S\subset L$ שהיא בת"א ~~מעל~~ מעל $K$, וההרחבה
$K(S)\subset L$
הוא אלגברית. כאן $K(S)$ תת השדה הנוצר,

בתוך $L$, ע״י $K$ ו-$S$.

עובדה: יהי $K \subset L$ הרחבת שדות, אז יש ל-$L$ בסיס טרנס׳ $S$ ביחס ל-$K$. אם $S'$ הוא בסיס טרנס׳ נוסף, אז $|S'| = |S|$.

הגדרה. מעלת הטרנסצנדנטיות של $L$ מעל $K$ היא $|S|$, כאשר $S$ בסיס טרנס׳ כלשהו.

(כלומר $L$ נוצר סופית כשדה)

אם $L = k(S)$, ו- $S$ סופית, אז יש $S' \subset S$ שהוא בסיס טרנס׳ ל- $L$ מעל $K$; ואז ההרחבה $k(S') \subset L$ היא סופית.

עד פה 23.3

ראינו לפני כי אם $K$ שדה סגור אלגברית, אז כל אידיאל מקסימלי של $K[t]$ הוא מהצורה $m = (t-\lambda)$ עבור $\lambda$ ב-$K$.

מסקנה שבה נכון גם לחוג $K[t_1, \dots, t_n]$, כפי שנראה מייד.

## משפט האפסים של הילברט
(Hilbert nullstellensatz)

יהי $K$ שדה, ויהי $L$ שדה הרחבה של $K$ שהוא נוצר סופית כ-$K$-אלגברה. אז ההרחבה $K \subset L$ סופית.

הוכחה: בספרות.