אופיין קוהומולוגי של חוגים רגולריים

תחילה קצת אלגברה הומולוגית. יהי A חוג.

קומפלקס של A-מודולים הוא סדרה

$$M = \left(\cdots \to M^{-1} \xrightarrow{\delta^0} M^0 \xrightarrow{\delta^1} M^1 \to \cdots \right)$$

בקטגוריה $\mathrm{Mod}\, A$, המקיימת $\boxed{\delta^{i+1} \circ \delta^i = 0}$.

נובע מכך כי $\mathrm{Im}(\delta^i) \subset \mathrm{Ker}(\delta^{i+1}) \subset M^i$.

הקוהומולוגיה ה-i של M היא המודול

$$H^i M := \frac{\mathrm{Ker}(\delta^{i+1})}{\mathrm{Im}(\delta^i)}$$

הגדרה: M הוא סדרה מדויקת אם $H^i M = 0$ לכל i.

ניקח עכשיו מודול M. רזולוציה חופשית של M היא סדרה מדויקת

$$(*) \qquad \cdots \xrightarrow{\delta^{-1}} P^{-1} \xrightarrow{\delta^0} P^0 \xrightarrow{\eta} M \to 0$$

שבה המודולים P^i הם חופשיים. קיימות רזולוציות חופשיות: (בוחרים יוצרים למודול M, ולוקחים מודול חופשי P^0 והומ' סורייקטיבי $\eta: P^0 \to M$. אחר כך בוחרים יוצרים למודול $\mathrm{Ker}(\eta)$, ולוקחים מודול חופשי P^{-1} והומ' סורייקטיבי $\delta^0: P^{-1} \to \mathrm{Ker}(\eta)$. וכן הלאה.

מתוך הרזולוציה ההופשית (*) נייצר קומפלקס

$$\boxed{\underline{P} := \left(\cdots \to P^{-1} \xrightarrow{\delta^0} P^0 \to 0 \to \cdots \right)}$$

נשים לב כי $H^i \underline{P} = 0$ עבור $i<0$, $0>i$;

ו-$H^0 \underline{P} \cong M$.

יהי N מודול נוסף. נקבל קומפלקס חדש

$$\operatorname{Hom}_A(\underline{P}, N) :=$$

$$\Big(\cdots \to \underset{-1}{0} \to \underset{0}{\operatorname{Hom}_A(P^0, N)} \xrightarrow{(\delta^0)^*} \underset{1}{\operatorname{Hom}_A(P^{-1}, N)} \xrightarrow{(\delta^{-1})^*} \cdots \Big)$$

מדרגה:

כאשר $(\delta^i)^* := \operatorname{Hom}(\delta^i, N)$.

נגדיר

$$\boxed{\operatorname{Ext}^i_A(M,N) := H^i \operatorname{Hom}_A(\underline{P}, N)}$$

זהו מודול ה-Ext מס' i.

מסתבר כי $\operatorname{Ext}^i_A(M,N)$ אינו תלוי בבחירת הרזולוציה ההופשית, ושזהו בי-פונקטור (קו-וריאנטי ב-N וקונטרה-וריאנטי ב-M).

הגדרה. יהי A חוג. הממד הקוהומולוגי הגלובלי של A הוא

$$\operatorname{gl.dim} A := \sup \left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; \operatorname{Ext}^i_A(M,N) \neq 0 \text{ יש מודולים } M \text{ ו-} N \text{ כך ש} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

<u>משפט</u> (Serre). יהי A חוג מקומי נתרייני.
התנאים הבאים שקולים:

(i) A חוג מקומי <u>רגולרי</u>.

(ii) הממד הקוהומולוגי הגלובלי של A הוא <u>סופי</u>.

יתר על כן, אם התנאים מתקיימים, אז

$$gl.\dim A = \dim A.$$

בעזרת משפט זה מוכיחים את המשפט הבא:

<u>משפט</u>. יהי A חוג מקומי רגולרי (נתרייני) ו- $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני. אז $A_{\mathfrak{p}}$ הוא חוג מקומי רגולרי.

<u>רעיון ההוכחה</u>: נסמן $A' := A_{\mathfrak{p}}$. יהיו M' ו- N' שני A'-מודולים נ.ס.
קל למצוא A-מודולים M ו- N נוצרים סופית
כך ש- $M' \cong A' \otimes_A M$ ו- $N' \cong A' \otimes_A N$.

די להוכיח כי $gl.\dim A' \le gl.\dim A$. מספיק להראות
כי $Ext^i_{A'}(M', N') = 0$ לכל $i > gl.\dim A$
ולמודולים M' ו- N' נוצרים סופית.

מתקבל די בפשטות מכך כי

$$Ext^i_{A'}(M', N') \cong A' \otimes_A Ext^i_A(M, N).$$

□

166.4

בעזרת משפט סר אפשר להסיק די בקלות:

יהי A חוג נתריני מקומי ממימד סופי.

התנאים הבאים שקולים:

(i) A חוג רגולרי.

(ii) הממד הקוהומולוגי הגלובלי של A הוא סופי.

יתר על כן, בתנאים אלו מתקיים

$gl.\dim A = \dim A$.

הטענות הקוהומולוגיות עובדות גם במקרה של חוגים לא קומוטטיביים. הדרך היחידה המוכרת להגדיר חוג לא-קומוטטיבי רגולרי היא ע"י $gl.\dim A < \infty$.

יריעות לא סינגולריות, יריעות רגולריות

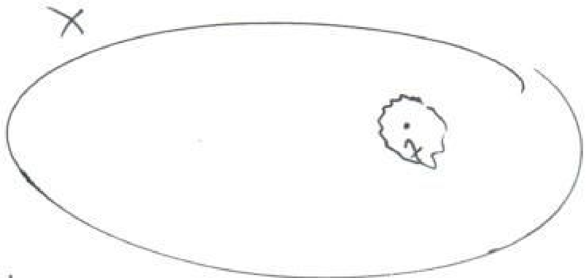
nonsingular alg. var.

— k שדה סגור אלגברית —

הגדרה.

יריעה אלגברית X מעל k תיקרא <u>יריעה רגולרית</u> אם לכל נקודה $x \in X$, החוג המקומי $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא חוג רגולרי.

הערה: בספרות (כמו Hartshorne) קוראים לזה nonsig. var.



איך בודקים? מה זה אומר? נניח כי X יריעה אי פריקה ממימד d. אז לכל נקודה x המימד של החוג המקומי $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא d. תנאי הרגולריות הוא שהמרחב הקו-משיקי, k מרחב וקטורי:

$$\boxed{\mathrm{rank}_k\, \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = d}$$

נשים לב כי שדה השאריות הוא תמיד $k = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k(x)$.

<u>הגדרה.</u> תהי X תת-יריעה סגורה שני פריקה של $\mathbb{A}^n$, ממימד d. נבחר יוצרים $f_1,\dots,f_l$ ל-האידיאל $I(X) \subset k[t_1,\dots,t_n]$.

אומרים כי היריעה X היא <u>לא-סינגולרית</u> non-singular בנקודה x אם הדרגה של המטריצה היעקוביאנית

$$J(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(x)\right]_{\substack{1\le i\le l\\ 1\le j\le n}}$$

היא $n-d$.

תת-היריעה X נקראת <u>לא סינגולרית</u> אם היא לא-סינגולרית בכל הנקודות $x\in X$.

פד 24.5

<u>משפט.</u> תהי X תת-יריעה סגורה אי-פריקה של $\mathbb{A}^n$, וכו'. $x\in X$ נקודה. התנאים הבאים שקולים:

(i) X <u>לא סינגולרית</u> בנקודה x.

(ii) החוג המקומי $\mathcal{O}_{X,x}$ <u>הוא רגולרי</u>.

<u>הערה.</u> עבור קבוצה $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ שמוגדרת ע"י התאפסות של פונקציות פולי' $f_1,\dots,f_l$, $l=n-d$, ואשר דרגת המטריצה היעקוביאנית היא l בכל נקודה $x\in X$, הרי X הוא יריעה דיפ' ממימד d (לפי משפט הפונקציה הסתומה).