מסקנה. יהי $\mathbb{K}$ שדה סגור אלגברית, ויהי $\mathfrak{m}$ אידיאל מקסימלי בחוג $\mathbb{K}[t_1,\dots,t_n]$. אז יש מקלרים יחידים $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ כך ש-

$$\mathfrak{m} = (t_1-\lambda_1,\dots,t_n-\lambda_n).$$

הוכחה. יהי $L := \mathbb{K}[t_1,\dots,t_n]/\mathfrak{m}$.

אז L שדה הרחבה של $\mathbb{K}$, שנוצר סופית כ-$\mathbb{K}$-אלגברה.

לפי משפט האפסים, L הרחבה סופית של $\mathbb{K}$.

אבל $\mathbb{K}$ שדה סגור אלגברית, ולכן

ההומ' $\mathbb{K}\to L$ הוא בוגדנוביד:

נסמן ב- $\mathbb{K} = L \ni \lambda_i$ את ~~[illegible]~~ $\pi(t_i)$,

כאשר $\pi : \mathbb{K}[t_1,\dots] \twoheadrightarrow L$ ההומ' הקאנוני.

אז $\pi(t_i-\lambda_i)=0 \Leftarrow t_i-\lambda_i \in \mathfrak{m}$.

נגדיר $\mathfrak{n} := (t_1-\lambda_1,\dots,t_n-\lambda_n)$. בדיד אחד

$\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$, ובדיד שני $\mathbb{K} \cong \mathbb{K}[t_1,\dots,t_n]/\mathfrak{n}$,

כלומר $\mathfrak{n}$ מקסימלי. סה"ב $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$. $\square$

זה גם מראה כי $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ יחידים.

משפט הנירמול של נתר (Noether normalization)

יהי K שדה, ותהי A K-אלגברה נוצרת סופית שהיא תחום שלמות, אז ישנם איברים $A \ni a_1, \dots, a_n$ כך ש:

- הסדרה $(a_1, \dots, a_n)$ בלתי תלויה אלגברית מעל K (בתוך הקודה $\mathrm{Frac}(A)$).
- A הוא מודול נוצר סופית מעל החוג $K[a_1, \dots, a_n]$.

הוכחה: בספרות.

ההומומרפיזם $K[a_1, \dots, a_n] \to A$ דמלפט הוא מקרה פרטי של:

הגדרה: הומומרפיזם של חוגים $A \to B$ נקרא סופי אם B הוא A-מודול נוצר סופית.

מימד קרול (Krull dimension)

הגדרה יהי A חוג. שרשרת של אידיאלים ראשוניים הוא סדרה $(\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n)$ של אידיאלים ראשוניים ב-A, כך ש- $\mathbb{P}_i \subsetneq \mathbb{P}_{i+1}$. המספר n נקרא אורך השרשרת.

שרשרת $(\mathbb{P}_0, \dots, \mathbb{P}_n)$ נקראת מקסימלית אם אי אפשר להרחיב אותה לשרשרת גדולה מהר.

נשיק לד רי אם A תחום שלמות ו- $(\mathbb{P}_0, \dots, \mathbb{P}_n)$ שרשרת מקסימלית, אז בהכרח $\mathbb{P}_0 = (0)$ ו- $\mathbb{P}_n$ מקסימלי.

הגדרה יהי A חוג לא טריוויאלי. מימד קרול של A הוא

$$\dim A := \sup \left\{ \begin{array}{l} \text{אורכים של שרשראות של} \\ \text{אידיאלים ראשוניים ב-} A \end{array} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

דוגמאות

- K שדה $\Leftarrow$ $\dim K = 0$.
- $A = \mathbb{Z}$ או $A = K[t]$ $\Leftarrow$ $\dim A = 1$.
- A נתריאני $\Leftarrow$ $\dim A[t] = \dim A + 1$.

(קשה - לא נתרחיב)

משפט המימד

משפט. יהי K שדה, תהי A K-אלגברה
נוצרת סופית שהיא תחום שלמות, ויהי $L := \mathrm{Frac}(A)$.
אז $\boxed{\dim A = \mathrm{tr.deg}_K L}$.

יתר על כן, האורך של כל שרשרת מקסימלית
של אידיאלים ראשוניים $A \to$ הוא $\mathrm{tr.deg}_K L$.

הוכחה: בספרות.

מסקנה: יהי $A := K[t_1, \dots, t_n]$. אז
$\dim A = n$.

□

יריעות אלגבריות אפיניות

מעתה והלאה $\mathbb{K}$ שדה סגור אלגברית. נצביר כי $S_p(\mathbb{K})$ הוא הקטגוריה של מרחבים עם פונקציות מעל $\mathbb{K}$.

המרחב האפיני $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$.

עבור חיתוך נתבונן בקבוצה $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^n$.

חוג הפולינומים $\mathbb{K}[\underline{t}] := \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$

מהווה חוג של פונקציות $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ בדרך

הבורה: אם $\begin{cases} \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \ni x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ \mathbb{K}[\underline{t}] \ni f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$ אז $f(x) := f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}$.

בהנתן קבוצה $S \subset \mathbb{K}[\underline{t}]$ נגדיר

$$Z(S) := \{ x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \mid f(x) = 0 \text{ לכל } f \in S \}.$$

זהי קבוצת האפסים של S.

טענה. אוסף הקבוצות $\{Z(S)\}$ מהווה אוסף קבוצות סגורות של טופולוגיה על הקבוצה $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, שנקראת טופולוגיה זריסקי (Zariski).

הוכחה. $\emptyset = Z(\{1\})$, $\mathbb{A}^n = Z(\emptyset)$,

$Z(S_1) \cup Z(S_2) = Z(S_1 S_2)$,

כאשר $S_1 S_2 := \{ f_1 f_2 \mid f_i \in S_i \}$.

ולבסוף

$$\bigcap_{I\ni i} Z(S_i) = Z\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right).$$

□

עבור $f\in \mathbb{K}[\underline{t}]$ נגדיר, כרגיל,

$$D(f) := \{x\in \mathbb{A}^n \mid f(x)\neq 0\}.$$

"הא-התאפסות" של f.

טענה הקבוצות $\{D(f)\}_{f\in\mathbb{K}[t]}$ מהוות בסיס של טופולוגיית זריסקי.

הוכחה. לכל קבוצת פולינומים S מתקיים:

$$\mathbb{A}^n - Z(S) = \bigcup_{f\in S} D(f).$$

□

הגדרה. תהי U קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{A}^n$, ותהי $f: U\to\mathbb{K}$ פונקציה.

א. תהי $x\in U$ נקודה. אומרים כי f רגולרית בסביבת x אם ישנה קבוצה פתוחה V, ופולינומים $g(\underline{t})\to h(\underline{t})$, כך ש- $x\in V\subset U$, $h(y)\neq 0$ לכל $y\in V$, ו- $f(y)=\frac{g(y)}{h(y)}$ לכל $y\in V$.

ב. f היא רגולרית אם היא רגולרית בסביבת כל $x\in U$.

נסמן ב- $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U)$ את אוסף הפונקציות הרגולריות $f: U\to\mathbb{K}$.

טענה. ההת אמה $U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U)$ היא אלומה של חוגי פונקציות על המרחב האפיני $\mathbb{A}^n$, והזוג $(\mathbb{A}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$ הוא מרחב עם פונקציות מעל k.

הוכחה. תרגיל.

< עד סוף 29.3

הגדרה. המרחב האפיני ה-n-מימדי מעל k הוא המרחב עם פונקציות $(\mathbb{A}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)})$, או בקצרה $\mathbb{A}^n$.

נזכיר כי בהנתן מרחב עם פונקציות $(X, \mathcal{O}_X)$ ב-$Sp(k)$, יש המושג של תת-מרחב סגור: זהו מרחב עם פונקציות $(Z, \mathcal{O}_Z)$ שבו $Z \subset X$ תת-קבוצה סגורה, ו-

$$\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X|_Z .$$

הגדרה. יריעה אלגברית אפינית מעל k היא מרחב עם פונקציות $(X, \mathcal{O}_X)$ מעל k, אשר הינו איזומורפי, בקטגוריה $Sp(k)$, לתת-מרחב סגור $(Z, \mathcal{O}_Z)$ של $(\mathbb{A}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$, עבור n כלשהו.

הגדרה. תהינה X ו-Y יריעות אלגבריות אפיניות מעל k. מורפיזם של יריעות אלגבריות $f: X \to Y$ הוא מורפיזם של מרחבים עם פ' מעל k.