טענה. $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ מרחב מופרד.

הוכחה. צריך להראות כי $\Delta(\mathbb{P}^n)$, האלכסון, ו
סגור בתוך $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n \times_{\mathrm{Sp}(\Bbbk)} \mathbb{P}^n$.

ידוע כי $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ כיסוי פתוח אפיני. לכל i ו-j
המכפלה $U_i \times U_j := U_i \times_{\mathrm{Sp}(\Bbbk)} U_j$
הוא יריעה אפינית, ו-
$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i,j} U_i \times U_j$$
כיסוי פתוח. מספיק להוכיח כי הקבוצה
$\Delta(\mathbb{P}^n) \cap (U_i \times U_j)$ סגורה בתוך $U_i \times U_j$. נגדיר
$f_{k,l} := \tilde{f}_{k,l}|_{t_i \otimes 1 := 1,\ 1 \otimes t_j := 1}$. אז לפי תרגיל 2:
$$\Delta(\mathbb{P}^n) \cap (U_i \times U_j) = g_{i,j}(Z(\{f_{k,l}\}))$$
כאשר $g_i \times g_j =: g_{i,j} : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to U_i \times U_j$.
איזומורפיזם של יריעות, ומזהים את $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n)$ עם
$\Bbbk[t_1, \dots] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[t_1, \dots]$. □

תרגיל 2) נגדיר $\tilde{f}_{k,l} := t_k \otimes t_l - t_l \otimes t_k$. אז
$\Delta(\mathbb{P}^n) = Z(\{\tilde{f}_{k,l}\})$.

תרגיל. 1) יהי $\tilde{f} \in \Bbbk[t_0, \dots, t_n] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[t_0, \dots, t_n]$
פולינום [illegible] בי-הומוגני; כלומר $\tilde{f} = \sum_i f_i' \otimes f_i''$
כאשר f_i' הומוגניים ממעלה d' ו- f_i'' הומוגניים
ממעלה d''. אז הקבוצה $Z(\tilde{f}) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$
מוגדרת היטב.

מסקנה $\mathbb{P}^n$ הוא יריעה אלגברית.

טענה $\mathbb{P}^n$ יריעה אי פריקה ממימד n.

הוכחה.

1) נגדיר $V := U_0 \cap \dots \cap U_n$.
$= D_{\mathbb{P}^n}(t_0 \cdots t_n)$

זוהי קבוצה פתוחה של יריעה ב- $\mathbb{P}^n$. ובפרט
בהכללה $V \subset U_i$. אבל U_i אי-פריקה ($\cong \mathbb{A}^n$)
הרי V צפופה ב- U_i. אבל $\mathbb{P}^n = \bigcup U_i$ כיסוי
פתוח. לכן V צפופה ב- $\mathbb{P}^n$.
כלומר V קבוצה פתוחה אי-פריקה. לכן
$\mathbb{P}^n$ גם היא אי-פריקה.

2) ניקח שרשרת $(Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d)$ של
תת-קבוצות אי-פריקות ב- $\mathbb{P}^n$. תהי $x \in Z_0$.
יש i כך ש- $x \in U_i$. נגדיר $Z_j' := U_i \cap Z_j$.
אז Z_j הוא הסגור של Z_j'; ולכן
$(Z_0', \dots, Z_d')$ שרשרת ב- U_i.
$(Z_j' \subsetneq Z_{j+1}')$, אבל $\dim U_i = n \Leftarrow d \le n$.
לכן $\dim \mathbb{P}^n \le n$.
בצד שני השרשרת שבה $Z_i := Z(t_0, t_1, \dots, t_{n-i})$
מרכבה מאורך n.

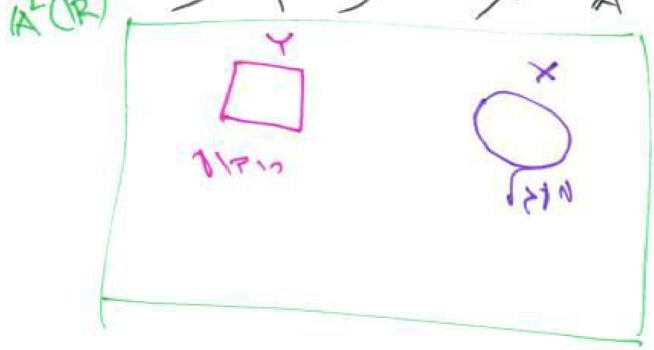
$\square$

137.5

אינטואיציה: הריבוע לעומת המעגל

ראשית השדה הוא $\mathbb{R}$.

נדון במישור $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, עם המבנה הקומפלקס־אנליטי (הטופולוגיה הקלאסית). הדיפרנציאביליות:
נסמן ב- $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$ את אלומת הפונקציות



במישור יש הקבוצות הסגורות X: המעגל
ו- Y: הריבוע. כמרחבים טופולוגיים, עם
הטופולוגיה המושרית, אלו מרחבים הומיאומורפים.

כעת המרחב $(X, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_X) =: (X, \mathcal{O}_X)$
הוא יריעה דיפ' ממימד 1, איזומורפית ל- S^1.

מה קורה במרחב $(Y, \mathcal{O}_Y) := (Y, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_Y)$?

אני אוכיח כי אין איזומורפיזם $X \xrightarrow{\cong} Y$
ב- $\mathcal{S}p(\mathbb{R})$, וכי Y איננו יריעה דיפ'.

הרעיון הוא לחשב את המרחב הקו-משיקי
פ זריסקי.

137.6

במובנים מסוימים יריעה דיפ׳ דומה X

יריעה אלגברית אפינית: יש הגדרה פונקציות. אולם בניגוד ליריעה אלגב׳ X, שם $\mathcal{O}_{X,x}$, מחוג המקומי קודם, הוא לוקליזציה של $\mathcal{O}_X(X)$, הרי במקרה הדיפ׳ ההומ׳ $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ הוא סורג׳קטיבי: עבור שני המקרים יש איז׳ קנוניים $\tilde{m}_x/\tilde{m}_x^2 \cong m_x/m_x^2$ כאשר $\tilde{m}_x \subset \mathcal{O}_X(X)$ ו- $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ האידיאלים המקסימליים.

— · —

<u>תרגיל</u>. (לא שלא עשר בעות בקצירה לפסח). X יריעה אלגב׳ אפינית, $x \in X$. נסמן כהוא. $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ נוצרת $\frac{\tilde{m}}{\tilde{m}^2} \xrightarrow{\varphi_x} \frac{m_x}{m_x^2}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \to & \mathcal{O}_{X,x} \\ \cup & & \cup \\ \tilde{m}_x & & m_x \end{array}$$

הראו ש- φ_x איז׳ קנוני.

— · —

נמשיך עם היריעות הדיפ׳. יהיה נוח יותר לעבוד עם $\tilde{m}_x/\tilde{m}_x^2$. אפשר להראות כי $\dim X = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \tilde{m}_x/\tilde{m}_x^2$. עבור $n=1$ הפירוש הוא כזה: אפשר להניח כי X קטע פתוח בתוך $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ ו- $x = 0$. תהי t הקואורדינטה. אחת הגרסאות של פיתוח טיילור אומרת שפונקציה דיפ׳ f על X

137.7

ניתן לרשום כך:

$$f(x') = f(0) + \frac{df}{dt}(0)\cdot t + g(x')\cdot t^2$$

עבור פונקציה ק״ס g. ($x' \in X$ כלשהו).

עבור $f \in \tilde{m}_x$ אזי $f(0) = 0$.

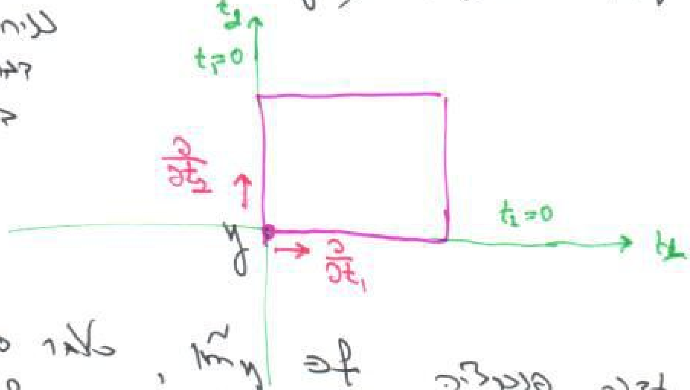
והפונקציה $f \mapsto \frac{df}{dt}(0)$

מגדירה איזו׳ $\frac{\tilde{m}_x}{\tilde{m}_x^2} \cong \mathbb{R}^1$.

לבסוף נחשב את $\tilde{m}_y / \tilde{m}_y^2$

עבור אחת הפינות $y \in Y$.

נניח כי $y = (0,0)$ בראשית, כמו בציור.



עבור פונקציה $f \in \tilde{m}_y$, כלומר פונקציה $f: Y \to \mathbb{R}$ שמתאפסת בנקודה y, הנגזרת של f לאורך הצלע התחתונה היא פונקציה לינארית על $\tilde{m}_y$, ...

$$\begin{cases} \varphi_1 : \tilde{m}_y \to \mathbb{R} \\ \varphi_1(f) = \frac{\partial f}{\partial t_1}(0) \end{cases}$$

אם $f \in \tilde{m}_y^2$, כלומר $f = \sum_i g_i h_i$, אז

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(f) = \sum_i \left(g_i \cdot \frac{\partial}{\partial t_1}(h_i) + h_i \cdot \frac{\partial}{\partial t_1}(g_i)\right)$$

ולכן $\varphi_1(f) = 0$.

לכן

(137.8) מקבלים הומו' מוגדר

$\bar{\varphi}_1 : \tilde{m}_y / \tilde{m}_y^2 \to \mathbb{R}$.

בדומה, ע"י גזירה $\frac{\partial}{\partial t_2}$ ועוד אחד

מקבלים $\bar{\varphi}_2 : \tilde{m}_y / \tilde{m}_y^2 \to \mathbb{R}$.

כאשר $\bar{\varphi}_i(t_j) = \delta_{i,j}$;

אז $\bar{\varphi}_1$ ו- $\bar{\varphi}_2$ בת"ל $\Leftarrow$

$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} \, \tilde{m}_y / \tilde{m}_y^2 \geq 2$.

(בעצם זה $= 2$).

תזכורת מגאו׳ אלג׳:

הגדרה. יריעה אלגברית פרויקטיבית (projective alg. var.) היא מרחב
טופ׳ קומפקטי X אשר איזומורפי
לתת-מרחב סגור של $\mathbb{P}^n$ עבור איזה n.

לפי הטענה הקודמת, ולכן קומפקטית, יריעה
פרויקטיבית היא יריעה אלגברית.

מכפלות של יריעות אלגבריות

משפט. תהיינה X ו- Y יריעות אלגבריות.
אז המכפלה $X \times_{Sp(k)} Y$ היא
יריעה אלגברית.

הוכחה.
1) יהיו $X = \bigcup U_i$ ו- $Y = \bigcup V_j$
כיסויים פתוחים אפיניים סופיים. ידוע כי
$X \times_{Sp(k)} Y = \bigcup_{i,j} \left(U_i \times_{Sp(k)} U_j \right)$ כיסוי פתוח. [illegible]
כאן $U_i \times_{Sp(k)} U_j$ יריעה אלגברית אפינית.

$U_i \times_{Sp(k)} U_j$ הוא תת-מרחב של $X \times_{Sp(k)} Y$, ו-

ראשית נניח ש- Y ו- $X \times_{Sp(k)} Y$ כיסוי. פתוח
אפיני סופי.

(ב) נבדוק כי זה מרחב מופרד. קשה לבדוק אוניברסליות
של המכפלה הקטגורית (קל לבדוק זאת),
יש איזומ'

$$(X \times_k Y) \times_k (X \times_k Y) \cong$$

$$(X \times_k X) \times_k (Y \times_k Y),$$

כאשר $\times_k$ היא קיצור ל- $\times_{Sp(k)}$.

נסמן ב- p את ההטלה ל- $X \times_k X$ וב- g
את ההטלה ל- $Y \times_k Y$. אז

$$\Delta(X \times_k Y) = p^{-1}(\Delta(X)) \cap g^{-1}(\Delta(Y)).$$

מאחר ו- $\Delta(X)$ ו- $\Delta(Y)$ סגורות, נקבל כי
$\Delta(X \times Y)$ סגורה.

□

עכשיו ראינו שהמכפלה הקטגורית קיימת ב-
$Var(k)$, ומתחלפת עם הפונקטור ל- $Sp(k)$.
לכן מעתה נשתמש בסימון $X \times Y$ במקום
$X \times_{Sp(k)} Y$.

תרגיל 3.5

הערה: אפשר להוכיח כי אם X ו- Y יריעות
פרויקטיביות, אז גם $X \times Y$ פרויקטיבית. (שיכון Segre).

139.1

משפט. תהי X יריעה אלגברית, ויהיו U ו- V קבוצות פתוחות אפיניות ב- X. אז $U \cap V$ קבוצה פתוחה אפינית.

הוכחה. תחילה נשים לב כי האלכסון $\Delta(X)$ הוא תת-יריעה סגורה של $X^2 := X \times X$. $\Delta : X \to \Delta(X)$ הינו איזומורפיזם, כי הפונקציה ההופכית $\Delta^{-1} : \Delta(X) \to X$ היא הצמצום ל- $\Delta(X)$ של ההטלה $P_1 : X^2 \to X$.

לכן מספיק להוכיח כי היריעה ~~[illegible]~~ הפתוחה $\Delta(U \cap V) \subset \Delta(X)$ הינה אפינית. ידוע לנו כי היריעה $U \times V$ הינה אפינית, ומצד שני היא איזומורפית לתת-יריעה פתוחה ב- $X^2 = X \times X$. כמו כן $\Delta(U \cap V) = \Delta(X) \cap (U \times V)$.

אך כן $\Delta(U \cap V)$ היא תת-יריעה סגורה של היריעה האפינית $U \times V$, ולכן היא אפינית. $\square$

יריעות אלגבריות שלמות

complete alg. var.

הגדרה: יריעה אלגברית שלמה היא יריעה אלגברית X עם התכונה הבאה: לכל יריעה אלגברית Y, ההטלה $p_Y : X \times Y \to Y$ היא מורפיזם סגור.

• נשים לב כי התכונה של "להיות מורפיזם סגור" היא טופולוגית בלבד; אולם הטופולוגיה של היריעה $X \times Y$ איננה טופולוגיית המכפלה!

• התכונה השלמה היא האנלוג האלגברי-גיאומטרי לקומפקטיות: אם מרחב טופולוג. X הוא קומפקטי, אזי לכל מרחב טופ' האוסדורף, ההטלה $X \times Y \to Y$ היא סגורה.

• בעולם הסכמות מגדירים את מורפיזמים נאותים (proper morphisms). יריעה אלג' X היא שלמה אמ"מ ההעתקה $\pi : X \to \{נקודה\}$ היא מורפיזם נאות.

משפט. תהי X יריעה אלג' שלמה, ויהי $f: X \to Y$ מורפיזם של יריעות. אז $f(X) =: X'$ קבוצה סגורה ב- Y, והיריעה $(X', \mathcal{O}_Y|_{X'})$ היא שלמה.

הוכחה. נתבונן ביריעה $X \times Y$ ובקבוצה

$$Z := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

שהוא הגרף של f. כי יש מורפיזם

$$f \times 1\!\!1_Y : X \times Y \to Y \times Y$$

ו- $Z = (f \times 1\!\!1)^{-1}(\Delta(Y))$.

לכן Z קבוצה סגורה ב- $X \times Y$. מאחר ש- X שלמה הרי

$$p_Y(Z) = f(X)$$

קבוצה סגורה ב- Y. (בהמשך כעין הדיון) $\square$

דוגמה. $\mathbb{A}^n$ איננה יריעה שלמה, כי יש מורפיזם $g_0: \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n$ אשר תמונתו איננה סגורה (ראינו כבר כי U_0 צפופה ב- $\mathbb{P}^n$).

מסקנה. תהי X יריעה שלמה ו- $Z \subset X$ תת-יריעה סגורה. אז Z יריעה שלמה.

הוכחה. תרגיל.

141.1

(המשך הוכחת ~~הלמה~~ המשפט)

⇐ נניח ש- X' שלמה. תהי Y'
יריעה כלשהי, ותהי $Z' \subset X' \times Y'$
תת-קבוצה סגורה. צ"ל כי $P_{Y'}(Z')$
סגורה ב- Y'.
נתבונן בדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd}
Z \subset X \times Y' \arrow[d, "g"'] \arrow[d, shift left=8, "f \times 1_{Y'} = g"] \arrow[dd, bend left=60, "h"] \\
Z' \subset X' \times Y' \arrow[d, "P_{Y'}"] \\
Y'
\end{tikzcd}$$

נסמן $g := f \times 1_{Y'}$ ו- $Z := g^{-1}(Z')$
ו- $h := P_{Y'} \circ g$. כעת Z סגורה
ב- $X \times Y'$, $Z' = g(Z)$ (כי g
סורג'קטיבית) ו- $P_{Y'}(Z') = h(Z)$.
מאחר ש- X שלמה נקבל כי $h(Z)$ סגורה
ב- Y'. $\square$

שימושים

משפט: תמונת יריעה שלמה היא שלמה. נוכיח בהמשך...

מסקנה: כל יריעה פרויקטיבית היא שלמה.

הוכחה. נובע של המשפט והלמה הקודמת.

מסקנה. תהי X יריעה שהיא אפינית וגם שלמה. אז X היא קבוצה סופית.

הוכחה. ניקח שיכון סגור $X \subset \mathbb{A}^n$. לכל i נתבונן במורפיזם $f_i : X \to \mathbb{P}^1$ שמתקבל ע"י הרכבה של $t_i|_X : X \to \mathbb{A}^1$ עם השיכון הפתוח $g_0 : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1$. הקבוצה $f_i(X)$ ב-$\mathbb{P}^1$ היא סגורה אבל חלקית ממש, לכן זו קבוצה סופית. $X \subset \prod_{i=1}^{n} t_i(X)$. ∎

סופית

כי X יריעה אי־פריקה

$f_i(X) = t_i(X) \subset \mathbb{A}^1 \underset{g_0}{\subset} \mathbb{P}^1$

מסקנה. תהי X יריעה שלמה וקשורה. אז $\mathcal{O}_X(X) = k$.

הוכחה. ניקח פונקציה $f \in \mathcal{O}_X(X)$. אז $f : X \to \mathbb{A}^1$ מורפיזם. $f(X)$ קבוצה סגורה ב-$\mathbb{A}^1$, לכן היא יריעה אפינית ושלמה. על התמונה $f(X)$ ... היא

קבוצה סופית ב-$\mathbb{A}^1$. אבל מצד שני $f(X)$ קבוצה קשורה. לכן $f(X) = \{\lambda\}$, כלומר $f(x) = \lambda$ לכל $x \in X$. ∎

יריעות אבליות

יריעה אבלית (abelian variety)

היא יריעה אלגברית שלמה [קשירה] X עם מבנה של חבורה. כלומר יש מורפיזמים $\mu: X\times X\to X$, $\iota: X\to X$

ואיבר $e\in X$ שמקיימים אקסיומות החבורה.

משפט. יריעה אבלית היא חבורה אבלית. (כלומר הכפל μ קומוטטיבי.)

רעיון ההוכחה. עבור איבר $x\in X$

נגדיר פונקציה $Ad(x): X\to X$,

$Ad(x)(y) := xyx^{-1}$.

רוצים להוכיח כי $Ad(x)=1_X$.

כעת $Ad(x)$ משרה מורפיזם או-לינארי

$Ad_g(x): g\to g$, כאשר g

הוא המרחב המשיק ל- X בנקודה e. (רעיון: g אלגברת לי). מספיק להוכיח כי $Ad_g(x)=1_g$.

ו- $Ad_g(x)$ אוטומורפיזם אלגברי.

יהי n המימד של X. אז $g\cong k^n$ ו-

$Ad_g(x)\in GL_n(k)$. מקבלים ש-

$Ad_g: X\to GL_n(k)$

הוא מורפיזם של יריעות. מאחר ש- X שלמה וקשירה, וגם $GL_n(k)$ אפינית, הרי Ad_g פונקציה קבועה.

סגור פרויקטיבי

יהי $X \subset \mathbb{A}^n$ קבוצה סגורה. נתבונן בשיכון הפתוח $g_0 : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. הסגור הפרויקטיבי של X הוא הקבוצה $\bar{X}$ ב- $\mathbb{P}^n$ שהוא הסגור בטופ' זריסקי של $g_0(X)$.

עבור פולינום $f(t_1,\dots,t_n)$ ממעלה $d \geq 0$. נסמן ב- $\tilde{f}(t_0,t_1,\dots,t_n)$ את ההומוגניזציה ההומוגנית, כלומר ממעלה d, של f. עבור $f=0$ ניקח $\tilde{f} := 0$.

משפט. יהי X קבוצה סגורה ב- $\mathbb{A}^n$. ויהי $\tilde{I}$ האידיאל ב- $\mathbb{K}[t_0,\dots,t_n]$ שנוצר ע"י הפולינומים $\tilde{f}$, עבור $f \in I_{\mathbb{A}^n}(X)$. אזי הסגור הפרויקטיבי של X הוא $\bar{X} = Z_{\mathbb{P}^n}(\tilde{I})$.

הוכחה. נסמן

$$I_{\mathbb{P}^n}(X) := \left\{ \text{האידיאל ב- } \mathbb{K}[t_0,\dots] \text{ שנוצר ע"י פולינומים הומוגניים } g \text{ שמתאפסים על הקבוצה } X \right\}$$

עפ"י הגדרת הטופולוגיה של $\mathbb{P}^n$ נקבל $\bar{X} = Z_{\mathbb{P}^n}(I_{\mathbb{P}^n}(X))$.

אנו נראה כי $I_{\mathbb{P}^n}(X) = \tilde{I}$.

(145) עבור $\tilde g$ הומוגני, $\tilde g$ מתאפס על X

אמ"ם $t_0^d \tilde g$ מתאפס על X לכל $d \geq 0$.

אפשר להניח כי t_0 לא מחלק את $\tilde g$.

כלומר $\tilde g$ מתאפס על X $\Leftrightarrow$

$g := \tilde g(1, t_1, \dots)$ מתאפס על X, כלומר $g \in I(X)$.

ומצד שני $\tilde g$ שווה להומוג' המינימלי של g.

□

מסקנה. אם $I(X)$ אידאל ראשי, נוצר,

$$I_{\text{אפ}}(X) = (f),$$

אז

$$I_{\text{פרו}}(X) = (\tilde f).$$

הוכחה. ניקח $g \in I(X)$. אז

$g(t_1, \dots) = h(t_1, \dots) \cdot f(t_1, \dots)$, וע"י הומוג' מינימליות נקבל

$$\tilde g = \tilde h \cdot \tilde f.$$ □

תרגיל. נתונים בקלאסיים האפיניים $X_1, \dots, X_4$ של שאלה 1 בעבודה לפסח. לכל i יהי $\bar X_i$ הסגור הפרויקטיבי (עבור $i=1,2,3$ זה במרחב $\mathbb{P}^2$, ועבור $i=4$ זה $\bar X_4 = \mathbb{P}^1$). להוכיח כי ש היריעות $\bar X_1, \dots, \bar X_4$ איזומורפיות.

לדף 4.5 >