הקטגוריה של יריעות אלגבריות אפיניות (algebraic variety, affine)

נסמן ב- $\mathrm{Var}_{af}(\mathbb{K})$ את הקטגוריה של היריעות האלגבריות האפיניות ב- $\mathbb{A}^n$ א. זוהי תת-קטגוריה מלאה של $\mathrm{Esp}(\mathbb{K})$.

הגדרה א-אלגברה אפינית היא א-אלגברה מצומצמת נוצרת סופית.

(A מצומצמת אם אין בה שורשים נילפוטנטים שונים מאפס!)

נסמן ב- $\mathrm{Alg}_{af}(\mathbb{K})$ את הקטגוריה של א-אלג' אפ' (תת-קטגוריה מלאה של $\mathrm{Alg}(\mathbb{K})$).
אנו זקוקים לתוצאות המשפטים הבאים:

משפט I. תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ תת-יריעה סגורה של $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, ויהי $I(X)$ האידיאל

$$I(X) := \{ f \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n] \mid f(x) = 0 \text{ לכל } x \in X \}.$$

אז ההומ' של א-אלגברות

$$\begin{cases} \mathbb{K}[\underline{t}] \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \\ f \longmapsto f|_X \end{cases}$$

משרה איזומורפיזם של א-אלגברות

$$\frac{\mathbb{K}[\underline{t}]}{I(X)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X).$$

מסקנה I. $\mathcal{O}_X(X)$ היא א-אלגברה אפינית.

הוכחה. כל חוג פונקציות על מרחב דמוי הוא מצומצם.
ומשפט I מראה כי $\mathcal{O}_X(X)$ נוצרת סופית כ- א-אלגברה.
∎

צריך את המשפט של אפס הילברט הרדיקלי חזק!

מסקנה 2: תהי A אלגברה אפינית. אז יש יריעה אפינית X כך ש- $A \cong \mathcal{O}_X(X)$.

הוכחה. נניח A נוצרת ע"י איברים $a_1,\dots,a_n$; בזאת יש הומו' סורג'קטיבי $\varphi: \mathbb{k}[\underline{t}] = \mathbb{k}[t_1,\dots,t_n] \twoheadrightarrow A$.

יהי $\mathfrak{a} := \mathrm{Ker}(\varphi)$, ונגדיר

$$X := Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n.$$

אז $(X, \mathcal{O}_X)$ יריעה אפינית, ולפי משפט II:

$$\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{k}[\underline{t}]/I(X).$$

מצד שני, מאחר ש- A חסרת נילפוטנטים, הרי האידיאל $\mathfrak{a}$ הוא רדיקלי. לפי המשפט של אפסים של הילברט ידוע כי

$$I(X) = I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.$$

ולכן $\mathcal{O}_X(X) \cong A$. □

משפט II. יהיו $(X,\mathcal{O}_X)$ יריעה אלגברית אפינית, ויהי $(Y,\mathcal{O}_Y)$ מרחב עם פונקציות מעל $\mathbb{K}$.

אז הפונקציה

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\underline{Sp}(\mathbb{K})}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\underline{Alg}(\mathbb{K})}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y)) \\ f \mapsto f^* \end{cases}$$

היא ביג'קטיבית.

מסקנה ו'.
הפונקטור הקונטרה-וריאנטי

$$\begin{cases} \underline{Var}_{af}(\mathbb{K}) \to \underline{Alg}_{af}(\mathbb{K}) \\ (X,\mathcal{O}_X) \mapsto \mathcal{O}_X(X) \\ f \mapsto f^* \end{cases}$$

הוא שקילות קטגוריות קונטרה-וריאנטית.

הוכחה. לפי משפט II הפונקטור הוא מלא ונאמן.
לפי מסקנה של משפט I הפונקטור הוא סורג'קטיבי
עד כדי איזומורפיזם של אובייקטים. □

<u>מסקנה</u> 2'. יהי $(X,\mathcal{O}_X) \in \underline{Sp}(\Bbbk)$. התנאים הבאים שקולים:

(i) $(X,\mathcal{O}_X) \in \underline{Var}_{af}(\Bbbk)$.

(ii) $\boxed{\mathcal{O}_X(X) \in \underline{Alg}_{af}(\Bbbk)}$, ולכל $(Y,\mathcal{O}_Y) \in \underline{Sp}(\Bbbk)$ מתקיים כי ההעתקה

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\underline{Sp}(\Bbbk)}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{\underline{Alg}(\Bbbk)}(\mathcal{O}_X(X),\mathcal{O}_Y(Y)) \\ f \longmapsto f^* \end{cases}$$

היא בייקטיבית.

<u>הוכחה</u>. (i) ⇐ (ii): נובע ממשפט II, ומהשקילות א׳ של משפט I.

(i) ⇐ (ii): נסמן $A := \mathcal{O}_X(X)$. זוהי אל-אלגברה אפינית, ולכן לפי מסקנה 2' יש יריעה אפינית Y כך ש- $\mathcal{O}_Y(Y) \cong A$. אם כן יש איזומ׳ $\varphi : \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X)$ בקטגוריה $\underline{Alg}(\Bbbk)$. לפי הנתון יש (ממשפט II) מורפיזמים $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ בקטגוריה $\underline{Sp}(\Bbbk)$, שמתאימים ל- φ ו- φ^{-1} בהתאמה. בגלל הפונקטוריאליות והבייקטיביות, $g \circ f$ מתאים ל- $\mathbb{1}_{\mathcal{O}_X(X)}$ ⇐ $g \circ f = \mathbb{1}_X$. כמו כן $f \circ g = \mathbb{1}_Y$. לכן f איזומ׳. □

אנו רוצים להוכיח את המשפטים I ו- II.
זה יקרה הלאה.

אידיאלים רדיקליים

<u>הגדרה</u>. יהי A חוג ויהי $\mathfrak{a} \subset A$ אידיאל.
<u>הרדיקל</u> של A הוא

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \left\{ a \in A \;\middle|\; \overset{\text{ההגדרה}}{a^n \in \mathfrak{a} \text{ עבור איזה } 1 \le n} \right\}.$$

חישוב קצר מראה כי $\sqrt{\mathfrak{a}}$ הוא אידיאל ב-A, אשר מכיל את $\mathfrak{a}$.

<u>דוגמה</u>. A חוג מצומצם $\Leftrightarrow$ (0) אידיאל רדיקלי ב-A.

<u>הגדרה</u>. אידיאל $\mathfrak{a}$ נקרא <u>אידיאל רדיקלי</u> אם $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

<u>תרגיל</u> $\mathfrak{a}$ רדיקלי אם"ם $A/\mathfrak{a}$ מצומצם.

<u>דוגמה</u> $A = \mathbb{Z}$. אז האידיאל (6) רדיקלי, שהרי $A/(6) \cong A/(3) \times A/(2)$.
לעומת זאת (8) איננו רדיקלי, ו-$\sqrt{(8)} = (2)$.

הגדרה. תהי $X \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{k})$ תת-קבוצה כלשהי. נגדיר

$$I(X) := \{ f(\underline{t}) \in \mathbb{k}[\underline{t}] \mid f(x)=0 \text{ לכל } x \in X \}.$$

טענה $I(X)$ אידיאל רדיקלי.

הוכחה נתבונן בהומו' של אל-אלגברות

$$\varphi : \mathbb{k}[\underline{t}] \to \mathbb{k}^X = \mathrm{Hom}_{Set}(X, \mathbb{k})$$

$$\varphi(f(\underline{t})) = f|_X : X \to \mathbb{k}$$

מהו $\mathrm{Ker}(\varphi)$? $f(\underline{t}) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff$ $f(x)=0$ לכל $x \in X \iff f(\underline{t}) \in I(X)$,

אם כן מקבלים הומו' אינג'קטיבי של חוגים:

$$\bar{\varphi} : \frac{\mathbb{k}[\underline{t}]}{I(X)} \hookrightarrow \mathbb{k}^X$$

ולכן $\mathbb{k}^X$ חוג מצומצם, לכן גם כל תת-חוג שלו. $\square$

נזכיר שלכל אידיאל $\mathfrak{a} \subset \mathbb{k}[\underline{t}]$ הגדרנו קבוצה סגורה $Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n$ (זריסקי).

(85)

"המשפט על אידיאלים רדיקליים"

משפט: יהי $\mathfrak{a} \subset k[\underline{t}]$ אידיאל. אז

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = I(Z(\mathfrak{a})).$$

הערה: זה אחד הניסוחים של משפט האפסים של הילברט.

[illegible] 30.3