הגדרה. תהי X יריעה תת-שונה (אי-פריקה) מעל $\mathbb{A}^n$, המוגדרת ע"י $f_1,\dots,f_l$ כך ש $I(X) = \mathbb{k}[t_1,\dots,t_n]$.

נאמר כי היריעה X היא לא-סינגולרית (non-singular) בנקודה x אם הדרגה של המטריצה היעקוביאנית

$$J(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(x)\right]_{\substack{\text{שורות}\\ \text{עמודות}}}$$

היא $n-d$.

תהי היריעה X נקראת לא סינגולרית אם היא לא-סינגולרית בכל הנקודות $x \in X$.

עמ' 24.5

משפט. תהי X תת יריעה מעורה (אי-פריקה) של $\mathbb{A}^n$, ולכל $x \in X$ נקודה הרשומים הבאים שקולים:

(i) X לא סינגולרית בנקודה x.

(ii) החלק המקומי $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא רגולרי.

הוכחה. עבור קבוצה $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ שמוגדרת ע"י l פולינומים של פולינומים בגודל $f_1,\dots,f_l$, $l=n-d$, ושהם בעלי המטריצה היעקוביאנית הוא l בכל נקודה $x \in X$, הרי X הוא יריעה בגודל מימד d (לפי משפט הפונקציה הסתומה).

הכרחה. נסמן $d := \dim X$. אזי

להראות כי
$$\boxed{\operatorname{rank}_{\mathbb{K}} \frac{\mathfrak{m}_X}{\mathfrak{m}_X^2} = d}$$

ולכן
$$\boxed{\operatorname{rank}_{\mathbb{K}} J(X) = n-d}.$$

נסמן $x = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{K}$,

ויהי $\mathfrak{m} := (t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)$ האידיאל המקסימלי בחוג הפולינומים $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n] =: \mathbb{K}[\underline{t}]$.

נסמן $\mathfrak{a} := I(X) \subset \mathbb{K}[\underline{t}]$; כך ש- $\mathcal{O}_X(X) \cong \frac{\mathbb{K}[\underline{t}]}{\mathfrak{a}}$.

יהי $\mathfrak{m}$ האידיאל המקסימלי בחוג $\mathcal{O}_X(X)$ המתאים לנקודה x. לכן מדפ איזו $\mathfrak{m} \cong \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}$,

$\mathfrak{m}^2 \cong \frac{\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}$, לכן

$$\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \cong \frac{\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}}{\frac{\mathfrak{m}^2+\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}} \cong \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+\mathfrak{a}}.$$

מדפ אזי (לפי הגדרה)
$$\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \cong \frac{\mathfrak{m}_X}{\mathfrak{m}_X^2}.$$

כלומר
$$(*) \quad \boxed{\operatorname{rank}_{\mathbb{K}} \frac{\mathfrak{m}_X}{\mathfrak{m}_X^2} = \operatorname{rank}_{\mathbb{K}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2+\mathfrak{a}}}$$

נגדיר העתק לינארי

$\theta : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^n$

(הצגת f פולינום) $\theta(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(x)\right)$.

שים לב כי הלכסון ה-i דומה ל-$J(x)$ הוא בדיוק $\theta(f_i)$.

יהיו $f,g \in \mathfrak{m}$. אז כלל לייבניץ:

$$\theta(fg) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(x)}} \cdot \theta(g) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(x)}} \cdot \theta(f) = 0$$

מכך נקבל העתק $\boxed{\bar\theta : \bar{\mathfrak{m}} \to \mathfrak{m}^n}$ כאשר $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. בפרט קבלנו מרחב ש- $\bar\theta$ הוא איזומורפיזם של אי-מודולים (הסלנדר אי $\mathfrak{m}^2$) הדרוש ונניח $\{f_i + \mathfrak{m}^2\}_{i=1}^n$ בלתי תלויים

מאותה סיבה $f_1, \dots, f_l$ יוצרים את $\mathfrak{a}$ כ. חבורה-מודולים, הרי $\bar f_1, \dots, \bar f_l$ יוצרים את $\bar{\mathfrak{a}} := \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}$ ב $\bar{\mathfrak{m}}$ כ. אי-מודול. כאן $\bar f_i := f_i + \mathfrak{m}^2$.

אנו מסיקים כי קיים האיזומורפיזם $\bar\theta : \bar{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{m}^n$, הרי אי-מודול $\bar{\mathfrak{a}}$ מאפס לאחר הכפלה של המטריצה $J(x)$. לכן

$$\boxed{\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} J(x) = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{a}}} \quad (**)$$

לסיום נתבונן בסדרה הקצרה המדויקת של אי-מודולים:

$$\boxed{0 \to \bar{\mathfrak{a}} \to \bar{\mathfrak{m}} \to \frac{\bar{\mathfrak{m}}}{\bar{\mathfrak{a}}} \to 0}$$

(תרגיל)

$$(4) \quad \boxed{\frac{\bar{\mathfrak{m}}}{\bar{\mathfrak{a}}} = \frac{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2}{\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}} \cong \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2}}$$

מן הקלף (לפי (*)):

$$\boxed{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \bar{a} + \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \frac{m}{a+m^2} = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \bar{m}}$$

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \bar{a} = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \text{הסל}$$

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \frac{m}{a+m^2} = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \frac{m_x}{m_x^2}$$

$$\bar{m} = n$$

לפי הסעיף (**) ולפי: -1

$\square$

מסקנה. תהי X יריעה סגורה על $\mathbb{R}^n$. אז X יריעה רגולרית.

(זה מקרה מיוחד לגמרי)

מסקנה. תהי X יריעה מגדר של $\mathbb{R}^n$, כך שלכל i היריעה $U_i \cap X$ היא לא-סינגולרית, כאשר מציבים $U_i \cong \mathbb{R}^n$. אז X יריעה רגולרית.

הוכחה. נקח $x \in X$. $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא הלוקאלי רגולרי. נקח i כך ש- $x \in U_i$, נגדיר $X' := X \cap U_i$. אז $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X',x}$. אבל X' איזומורפי ליריעה מגדר לא-סינגולרית של $\mathbb{R}^n$, לכן המקומי ומכאן לכל $\mathcal{O}_{X',x}$ רגולרי.

$\square$

מחלקים על יריעות

(divisors)

מלה X יריעה אלגברית אי-פריקה מעל k.
נסמן ב- $k(X)$ הרחב שדה הפונקציות הרציונליות.

הגדרה. מחלק אלמנטרי (prime divisor) ב- X
הוא קבוצה שנראה אי-פריקה D ב- X מקסימלית
1. כלומר $\dim(D) = \dim(X) - 1$.

דוגמה. אם X מקיים, כלומר $\dim(X) = 1$,
אז מחלק אלמנטרי הוא נקודה ב- X.

הגדרה. חבורת המחלקים של X הוא החבורה
האבלית החופשית הנוצרת ע"י המחלקים האלמנטריים.
החבורה מסומנת ע"י $\mathrm{Div}(X)$. איבר בחבורה נקרא
ויטלין ע"י $\sum_i n_i D_i$, כאשר $\{D_i\}$ (Weil divisor)
מחלק (או לפחות)
הוא קבוצת המחלקים האלמנטריים, $n_i \in \mathbb{Z}$,
ו- $n_i = 0$ פרט לסופי רבים.

דוגמה יהי X מקיים רגולרי. נקח נקודה
$x \in X$. הטבעת המקומית $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא תחום שלמות רגולרי
מקומי מימד 1, לכן הוא DVR. מגדיר מס'.

$$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,x}) = k(X).$$

אנו רואים איך הקבוצה U_x בתוך השדה $k(X)$ כקבוצה $\mathcal{O}_{X,x}$ הינו חלק השלמים של U_x.

אנו כבר יודעים גם שהיחס מהנאמר ב דומה.

$x \neq y$ מתקיים. זה רואים: $\Leftarrow U_x \neq U_y$.

הגדרה יהי X מרחב רציונלי שלם. איז כל הגדרות הפונקציות v על השדה $k(X)$, המקיימות $v(k^\times)=0$, הן מהצורה v_x, $x \in X$. אפשר לחשוב שהן המרחב X מתקבל בדרך הבאה כולה צורה (סוגל את סוף צריך, הן שלמה $\mathcal{O}_x$).

$f: X \to Y$ שרטוט קואורדינטות

נתבונן בעורכים רציונליים בין שני מרחבים שלמים f מורפיזם (חלקי) פונקציה רציונלית המתאים $f^*: k(Y) \to k(X)$.

כאשר יש פונקטור

{ מרחבים שלמים רציונליים, מורפיזמים רציונליים } $\longrightarrow$ { שדות נורמליים מעל k מורפיזמים מעל k }

(מרחב קבוע מראש)

תכונת השיון ידי שמתקבלת מרחב V שבה שקילות (קונגרואנטיות) של קטגוריות.

הגדרה. **טענה.** יהי D מחלק ראשוני ב- X. אז קיים הלוקליזציה בוליאנית יחידה $\mathcal{O}_D$ של השדה $k(X)$, עם התכונה הבאה: יהי U קבוצה פתוחה אפינית ב- X כך ש- $U \cap D \neq \emptyset$. יהי $A_i = \mathcal{O}_X(U)$, ויהי $P_i = I_A(U \cap D)$, שהינו אידאל ראשוני גובה 1. אז החוג המקומי A_P שווה לחוג ההלוקליזציה של $\mathcal{O}_D$, כתת-חוגים של $k(X)$. נסמן ב- $\mathcal{O}_{X,D}$ את חוג ההגדרה (= חוג הפונקציות) של $\mathcal{O}_D$.

הגדרה. יהי A חוג נתרי, ויהי A אידאל ראשוני ב- A. הגובה (height) של P הינו $ht(P) := \dim A_P$.

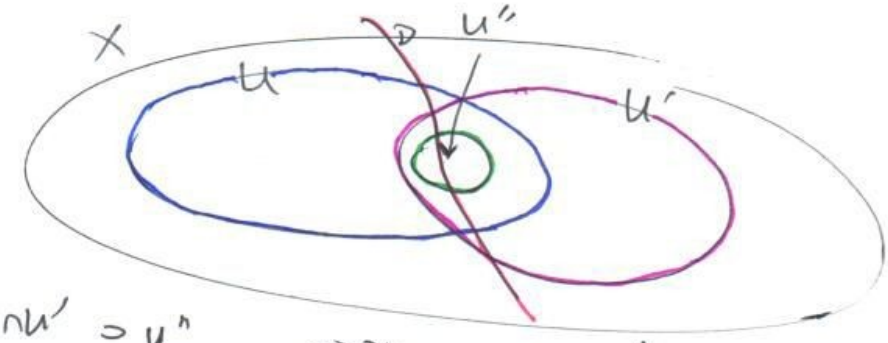
כלומר $ht(P) = \sup\{$ אורך שרשרת של אידאלים ראשוניים $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$ כך ש- $P_n \subset P$ $\}$

$< \infty$ מה 3.5

הוכחה. V נקבה קבוצה פתוחה אפינית U כנ"ל. מאחר ש- A חוג רציונלי, הרי A_P הינו חוג רציונלי, מימד 1. לכן A_P הינו DVR, ולכן הלוקליזציה מקיימת $\mathcal{O}_D$ את השדה $k(X)$.

שלב 2: נכשל ניקח קבוצה פתוחה אפינית U' ונתבונן ב $U' \cap D \neq \phi$. נקבל $A' := \mathcal{O}_X(U')$ ו $\mathfrak{p}' := I_{A'}(D \cap U')$.

בנוסף $A'_{\mathfrak{p}'} = A_{\mathfrak{p}}$ כתת חוג של $k(X)$.



ניקח U'' פתוחה אפינית, $U'' \subset U' \cap U$, $U'' \cap D \neq \phi$. נקבל כיל הבא.

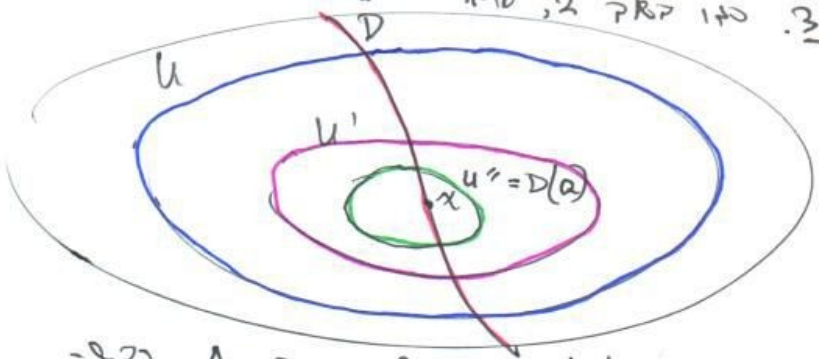
$A''_{\mathfrak{p}''}$ הוא חלק של

$$\begin{tikzcd} A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "\varphi'"'] & A''_{\mathfrak{p}''} \arrow[r, hook] & k(X) \\ & A'_{\mathfrak{p}'} & \end{tikzcd}$$

מטרתנו להראות כי φ ו- φ' אינברטיביות.

אך כן נוכל להניח כי $U \subset U'$.

שלב 3. כמו בשלב 2, נניח $U \subset U'$.



ניקח $x \in U' \cap D$. יש $a \in A$ כך ש-

$$x \in D_{U'}(a) \subset U'$$
$$\overset{\shortparallel}{U''}$$

(אינדוקציה)

מדרגה הבאה של מכפיל

$$A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow A'_{\mathfrak{p}'} \hookrightarrow A''_{\mathfrak{p}''} \subset k(X).$$

$$\psi$$

מספיק להראות כי ψ הוא $\cong$.

כלומר $A'' = A_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p} \cdot A''$,

ו- $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, לכן

$$A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{p}''} = A''_{\mathfrak{p}''}.$$

$$= (A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a}}$$

דוגמה. $\mathbb{A}^1$ נקח $X := \mathbb{A}^1$, $D := \{0\}$,

הידיאל, אז $\mathfrak{p} = I_{k[t]}(0) = (t)$.

$k[t]_{\mathfrak{p}} = k[t]_{(t)} \subset$

$= \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; t \nmid g \right\}$ $\quad k(X) = k(t)$

הלוקליזציה הוא

$$\mathrm{Im} = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \;\middle|\; \begin{array}{l} t \mid f(t) \\ t \nmid g(t) \end{array} \right\},$$

(ההלוכה היא ההלוכה מה ה- t-אופיות. (עבור $v_t(t) = 1$,

ההתיישרות של הפונקציה $\frac{f(t)}{g(t)}$ בראשית).

דוגמה 2. $X := \mathbb{P}^1$, $D := \{(1:0)\}$, שהוא

הראשית בתלך האפיני U_0. כלומר הפרה הוא

$k(X) = k(\frac{t_1}{t_0})$, ולפרה U_0 נקבל $t := \frac{t_1}{t_0}$, $A = k[t]$.

הלוקלי U_D הוא כמו בדוגמה 1.

הגדרה תחילה מאלגברה קומוטטיבית (הגדרה מסתרת):

משפט. יהי A תחום שלמות נתרי. אז

$$A = \bigcap_{\text{מקס' אידאל } \mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$$

בתוך $\operatorname{Frac} A$.

משפט. תהי X יריעה אלגברית רציונלית, ותהי U קבוצה פתוחה שאינה ריקה ב-X. אז

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{\substack{\text{מחלקים } D_i \\ \text{כך ש- } U \cap D_i \neq \emptyset}} \mathcal{O}_{X,D_i}$$

בתנאי שהגופים k הם $k(X)$.

הוכחה. נבדוק בשלב ראשון $U = \bigcup V_j$.

יתקיים כי

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_j \mathcal{O}_X(V_j) \qquad (*)$$

מתכונת השלמה של $\mathcal{O}_X$. מספיק להראות כי

$$\mathcal{O}_X(V_j) = \bigcap_{\substack{\text{מחלקים } D_i \\ \text{כך ש- } V_j \cap D_i \neq \emptyset}} \mathcal{O}_{X,D_i} \qquad (**)$$

מהשלמה (*) ו-(**):

אפשר לבחור ש- U היא אפינית.

נשים $A := \mathcal{O}_X(U)$. תהי D_i מחלק כך ש- $U \cap D_i \neq \emptyset$, ויהי $\mathfrak{p}_i := I_A(U \cap D_i)$.

אז $\mathcal{O}_{X,D_i} = A_{\mathfrak{p}_i}$. לכן המשפט שבוטל:

$$\mathcal{O}_X(U) = A = \bigcap A_{\mathfrak{p}_i} = \bigcap \mathcal{O}_{X,D_i}$$

$\square$

טענה. יהי $f \in k(X)^{\times}$. אז $v_D(f)=0$ פרט למספר סופי של מחלקים אי־פריקים D.

הוכחה. יהי $n:=\dim X$. עבור קבוצה פתוחה affine כלשהי U ב־X,

אם $\dim(X-V)=n-1$ אז המחלקים V כנ"ל הם אי־פריקים (אחרת $X-V$ שמכיל $n-1$).

נרשום $f=g/h$, כאשר $g,h\in \mathcal{O}_X(U)$ פונקציות שונות מ־0. נסמן $V:=D_U(gh)=D_U(g)\cap D_U(h)$; זהו קבוצה פתוחה לא ריקה, אפינית כתת־קבוצה של U. מאחר ש־$\dim(X-V)\le n-1$, קיים מספר סופי של מחלקים אי־פריקים D ש־$D\cap V=\emptyset$.

לכל מחלק אי־פריק D שמקיים $D\cap V\neq\emptyset$, נגדיר $A:=\mathcal{O}_X(V)$ ו־$P:=I_A(D\cap V)$. מאחר ש־g,h ב־$A^{\times}$ הם g,h ב־$A_P^{\times}$, לכן $v_D(g)=v_D(h)=0$. כלומר $v_D(f)=0$.

$\square$

הגדרה. יהי $f \in k(X)^\times$. המחלק של f הוא המחלק $(f)_i = \sum_i v_{D_i}(f) \cdot D_i \in \mathrm{Div}(X)$.
(הסכום על מחלקים ראשוניים)

מחלק D הנמצא $D = (f)$ נקרא מחלק ראשי (principal divisor).

מאחר ש- $(fg) = (f) + (g)$
הרי המחלקים הראשיים מהווים תת-חבורה של $\mathrm{Div}(X)$.

הגדרה. יחס השקילות על $\mathrm{Div}(X)$ מאפיין ע"י המחלקים הבאים, כלומר
$D \sim D'$
אם $D - D' = (f)$ עבור איזה $f \in k(X)$,
נקרא (linear equivalence) שקילות לינארית.

ההגדרה
$$Cl(X) := \frac{\mathrm{Div}(X)}{\text{linear equiv.}}$$
נקראת חבורת מחלקות השקילות של המחלקים (divisor class group).

הערה: לכל אלג' X נלשהי (עם בלוקאו רציונלי) ישנה חבורת פיקאר (Picard), שאברי הם מחלקות איזומורפיזם של אגדים קוויים (line bundles). אם X רציונלית אז אלג' קאטלי של חבורה $Pic(X) \cong Cl(X)$.

מתלקים של $\mathfrak{p}$

תחילה בפרק הבאות נחלק אחד קומבינטוריות (ראו ספרות סלנקרלוות).

משפט (על האידיאלים הראשוניים של קרול)
(Krull Hauptidealsatz)

יהי A תחום שלמות נתרי, ויהי $\mathfrak{p}$ אידיאל ראשוני ב- A, $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq A$, שהוא **ראשי**: (כלומר, $\mathfrak{p} = (a)$, לאשר $a \neq 0$ ו- a אינו הפיך). אז $ht(\mathfrak{p}) = 1$.

משפט. יהי A תחום שלמות נתרי (לא UFD) שני התנאים הבאים שקולים:

(i) A הוא תחום פריקות יחידה (UFD).

(ii) כל אידיאל ראשוני (prime) $\mathfrak{p}$ בגובה 1 הוא ראשי (principal).

מי הנמנע הבקלים שמתפנה הוא רק יותר מדוע...

טענה 14. יהי $f(\underline{t}) \in [x_1,\dots,x_n]$ פולינום הומוגני, $\neq 0$ ויהי $g(\underline{t})$ פולינום מתוקן של $f(\underline{t})$. אז גם $g(\underline{t})$ הומוגני.

הוכחה: נניח $f(\underline{t}) = g(\underline{t}) \cdot h(\underline{t})$. יהי

$$g(\underline{t}) = \sum_{i=i_0}^{i_1} g_i(\underline{t})$$

$$h(\underline{t}) = \sum_{j=j_0}^{j_1} h_j(\underline{t})$$

הפולינום לרכיבים הומוגניים, כאשר $g_{i_0}, g_{i_1}, h_{j_0}, h_{j_1}$ כולם $\neq 0$.

יהי $d := \deg(f)$. אז

$$f_{i_0+j_0} = g_{i_0} \cdot h_{j_0} \neq 0$$

$$f_{i_1+j_1} = g_{i_1} \cdot h_{j_1} \neq 0$$

לכן $i_0+j_0 = d = i_1+j_1$

אי $i_0 = i_1$, $j_0 = j_1$. $\square$

טענה 58. תהי X קבוצה סגורה אי-פריקה ב- $\mathbb{A}^n$.
התנאים הבאים שקולים:

(i) X היא מחלק ראשוני, כלומר $\dim X = n-1$.

(ii) $X = Z(f)$, כאשר f פולינום אי-פריק.
(אי-פריק: דרגה $\deg(f) \geq 1$ ו- $f \neq 0$.)

הוכחה. נשים $\mathfrak{p} := I(X)$.

(i) $\Leftarrow$ (ii): יודע כי $ht(\mathfrak{p}) = 1$.
כאן ידוע ש- $k[t_1,\dots,t_n] = k[\underline{t}]$ היא UFD.
לפי אמת המידה שבשלב, $\mathfrak{p}$ היא ראשי (הראשי מ UFD); כלומר
$\mathfrak{p} = (f)$. אבל אז f היא פולינום אי-פריק.

(ii) $\Leftarrow$ (i): צריך לבדוק ישירות: $ht(\mathfrak{p}) = 1$. ($\mathfrak{p} = (f) \neq 0$)
$\Leftarrow$ $\dim X = n-1$.

$\square$

טענה 58. קבוצה X ו- Y יריעות אלגבריות
אי-פריקות. אז גם $X \times Y$ יריעה אי-פריקה,
ומתקיים $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

הוכחה: תרגיל.

קטקליזם. יהי $X \subset \mathbb{P}^n$ זן אי-פריקה. אז המחרוט הסבירה $C(X)$ הינו זן אי-פריקה ב- $\mathbb{A}^{n+1}$, ומתקיים

$$\dim(C(X)) = \dim(X) + 1 .$$

הוכחה.

יהי $g \in GL_{n+1}(k)$ (כלומר יש פולינום $g \in GL_{n+1}(k)$ ב- $\mathbb{P}^n$) מספיק לקבוע כי $U_0 \cap X \neq \emptyset$.

כלומר $X' := U_0 \cap X$ אי-פריקה, שכן U_0 פתוחה.

$$\boxed{\dim(X') = \dim(X)} \quad (*)$$

(המשך בעמוד הבא)

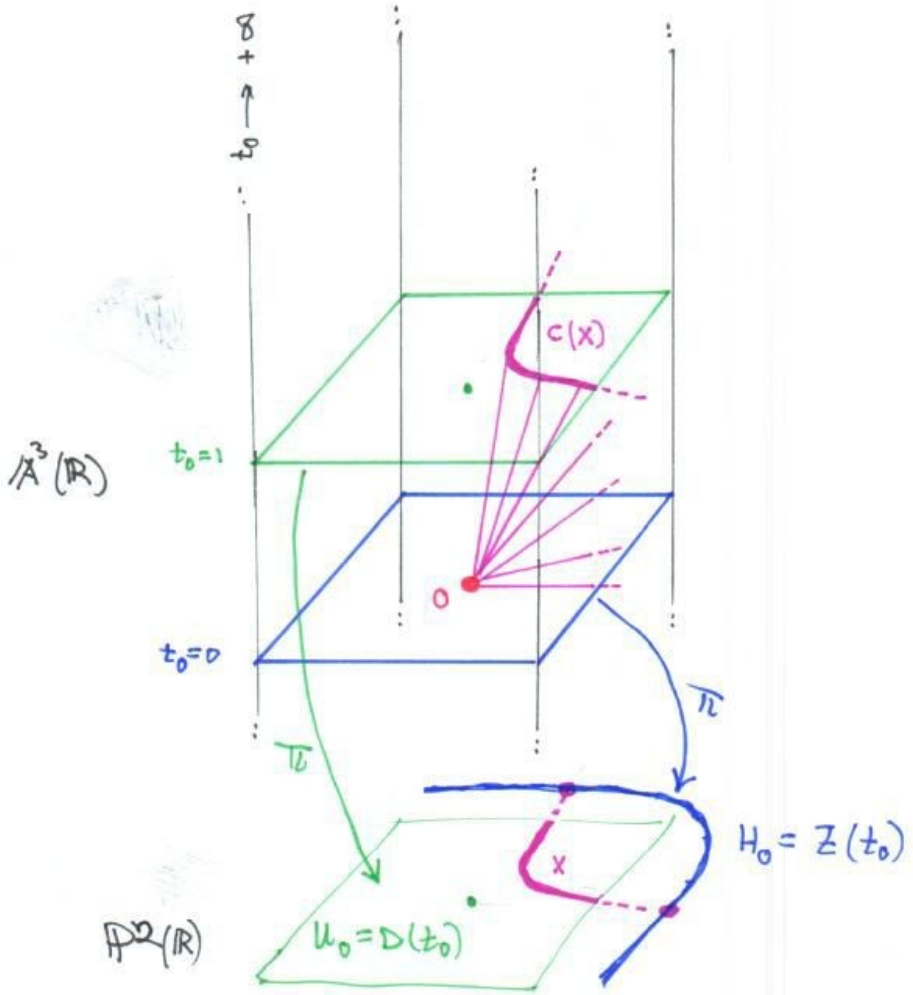
יהי $V_0 := \pi^{-1}(U_0)$. אז $V_0 = D_{\mathbb{A}^{n+1}}(t_0) \subset \mathbb{A}^{n+1}$

קרוב פשוט אינו. ש מורפיזם

$$\sigma_0 : \begin{cases} U_0 \to V_0 \\ (1:a_1:\dots:a_n) \mapsto (1, a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

אז σ_0 איזומורפיזם של יחידות $V_0 \cong U_0 \times GL_1(k)$. ($GL_1(k) = k^*$)

$V' := \pi^{-1}(X') \cong X' \times GL_1(k)$ איזו' גם מאוד איזו'.



ההלה $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})-\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

מקיים (הפרדלה) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \supset X$

והתרנג הכרוניקטיבי $\mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \supset C(X)$

כלומר $GL_1(k)$ יריעה אי-פריקה מממד 1
(איזו? - $D(t_1) \subset \mathbb{A}^1$), ולפי הלמה הקודמת (3)
מקבלים ש- $\pi^{-1}(X') = Y'$ יריעה אי-פריקה מממד

$$\boxed{\dim(Y') = \dim(X') + 1} \quad (**)$$

אבל המרחב $Y := C(X)$ הוא בדיוק הטבעת הטנסורית
מ- $\mathbb{A}^n$ של $Y' = \pi^{-1}(X')$. לכן Y אי-פריקה
ו-

$$\boxed{\dim(Y) = \dim(Y')} \quad (***)$$

נותר לזכור את המשוואות $(*)$, $(**)$ ו- $(***)$. $\square$

מסקנה. תהי $X \subset \mathbb{P}^n$ קבוצה סגורה אי-פריקה.
הבאים שקולים:
(i) $\dim(X) = n-1$.
(ii) יש פולינום הומוגני אי-פריך f
כך ש- $X = Z_{\mathbb{P}^n}(f)$.

הוכחה. בעזרת הטענה הקודמת (מס' 4) אפשר לקבל קבוצה
הסגורה: האי-פריקה $Y := C(X) \subset \mathbb{A}^{n+1}$,
שהיא המרחב (שאינוואריאנטי תחת פעולת $GL_1(k) = k^\times$),
ו- $\dim(Y) = \dim(X) + 1$.

נניח תחילה כי $n = \dim(Y)$. לפי טענה 2
יש פולינום אי-פריך f כך ש- $Y = Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(f)$.
אולם מכך שני האידיאלים $\mathbb{P} := I_{k[\underline{t}]}(Y) = (f)$ הוא
הראשוני. כלומר $f_d \in (f)$, כאשר f_d הרכיב ההומ'
ממעלה מקסימלית של f. כלומר $f_d \mid f$. לפי טענה 1: f הומ' $\Leftrightarrow$
$f_d = f$). ובמילים $X = Z_{\mathbb{P}^n}(f)$.

מכלל המשלים, נניח שיש f בלתי-פריק כך ש- $X = Z_{\mathbb{P}^n}(f)$. אז $Y = Z_{\mathbb{A}^n}(f)$.

לפי טענה 2 מהרצאה $\dim(Y) = n$.

ולפי טענה 4 מהרצאה $\dim(X) = n-1$.

$\square$

טענה. יהי $f \in \underline{k}(\mathbb{P}^n)$ פונקציה רציונלית $\neq 0$.
אז קיימים פולינומים $g(\underline{t}), h(\underline{t}) \in k[\underline{t}] = k[t_0, \dots, t_n]$, שניהם $\neq 0$ והראשונים מאותה דרגה, כך ש- $f = \frac{g}{h}$.

כלומר, אם נניח את הקבוצה הפתוחה הבאה $U := D_{\mathbb{P}^n}(h) \subset \mathbb{P}^n$, אז $g/h \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$, והצמד $(U, g/h)$ מייצג את f בשדה $\underline{k}(\mathbb{P}^n)$.

יתר על כן הפולינומים g ו- h יחידים עד כדי כפל בסקלר. כלומר אם גם $f = g'/h'$ הוא הצגה של f כנ"ל, אז יש $\lambda \in k^\times$ כך ש- $g' = \lambda g$ ו- $h' = \lambda h$.

הוכחה. תרגיל.

משפט. יהי $f \in k(\mathbb{P}^n)^\times$. נכתוב $\boxed{f = g/h}$, כאשר $g(\underline{t}), h(\underline{t}) \in k[t_0, \dots, t_n]$

פולינומים הומוגניים מאותה מעלה. נרשום גם לכל

יהי $\boxed{g = \prod_i g_i^{l_i}}$ ו- $\boxed{h = \prod_j h_j^{m_j}}$

הגורמים של g ו- h עליהם אם - גורמים $\in k[\underline{t}]$

(כלומר $g_i(\underline{t})$ ו- $h_j(\underline{t})$ פולינומים אי-פריקים שונים,

ו- $l_i, m_j \in \mathbb{Z}$). יהי $\boxed{D_i := Z_{\mathbb{P}^n}(g_i)}$ ו-

$\boxed{E_j := Z_{\mathbb{P}^n}(h_j)}$ המחלקים המתאימים.

אז

$$\boxed{(f) = \left(\sum_i l_i D_i\right) - \left(\sum_j m_j E_j\right)}.$$

הוכחה. ל"ש שיש אינטגרל פונקציה. (בפרט

$GL_{n+1}(k)$ פועל על $k[\underline{t}]$) נשתמש בכך ש- $g \circ t_0$ ו-

$h \circ t_0$. כמקרה אחרון .. הפעל מראה

כאינטואיציה $L_i = Z_{\mathbb{P}^n}(t_0)$ שיש מוכל גם ב-

$Z_{\mathbb{P}^n}(g)$ ו- $Z_{\mathbb{P}^n}(h)$.

נגדיר $\tilde{g}_i := g_i / t_0^{\deg(g_i)}$ ו- $\tilde{h}_j := \dfrac{h_j}{t_0^{\deg(h_j)}}$.

אז $\tilde{g}_i$ ו- $\tilde{h}_j \in k(\mathbb{P}^n)$, ומאותה סיבה

$$\left(\sum_i l_i \cdot \deg(g_i)\right) - \left(\sum_j m_j \cdot \deg(h_j)\right) = 0$$

הרי

$$f = \frac{g}{h} = \frac{\prod_i \tilde{g}_i}{\prod_j \tilde{h}_j}$$

לכן

$$(f) = \left(\sum_i (\tilde{g}_i)\right) - \left(\sum_j (\tilde{h}_j)\right)$$

מספיק להראות כי

$$\boxed{(\tilde{g}_i) = l_i D_i - l_i \cdot \deg(g_i) \cdot L_0} \quad (*)$$

ו-

$$\boxed{(\tilde{h}_j) = m_j E_j - m_j \cdot \deg(h_j) \cdot L_0} \quad (**)$$

(□)

$$\boxed{f = \frac{g(\underline{t})}{t_0^d}}$$

אז ב) אי אפשר לכתוב בצורה הבאה

כאשר $g(\underline{t})$ פולינום אי-פריק הומוגני מדרגה d,

ו- $t_0 \nmid g(\underline{t})$. לפי (*) ו- (**)

מספיק כי נוכיח ש-

$$\boxed{\text{יש } (f) = D - d \cdot L_0}$$

כאשר $D := Z_{\mathbb{P}^n}(g)$.

אז ב) f כמו ב-(□). מאידך לינארי של f בקרבת הנקודה

הראשונית U_0, נקבל ש-

$$\boxed{f = g\left(\frac{t_1}{t_0}, \dots, \frac{t_n}{t_0}\right) \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_0)}.$$

נשים דגש-הומוגניות $t_0 := 1$, מאחר ב-U_0

$\varphi_0^*(f) \in k(\mathbb{A}^n)$

הורקה הטבעית $\mathbb{A}^n$ של

מוגדרת ע"י הפולינום $g' := g(\underline{t})|_{t_0 := 1} \in \underbrace{k[t_1, \dots, t_n]}_{B}$

(הוא אינו מדרגה d, אלא אינו הומוגני).

$$\varphi_0 : \mathbb{A}^n \xrightarrow{\simeq} U_0$$

187 הבחינים g' הוא שורש פרימיטיבי, והיא אם $\mathbb{P} := (g') \subset B$

הנורמלי. נתבונן $D' := Z_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{P}) = Z_{\mathbb{A}^n}(g')$

$\cong \varphi_0^{-1}(D \cap U_0)$

$$\underline{k}(\mathbb{A}^n) \left[\overset{\varphi_0^*}{\cong} \underline{k}(\mathbb{P}^n) \right]$$

$$\underset{B_{\mathbb{P}}}{\overset{\text{אזור}}{\underline{k}[t_1,\dots,t_n]_{\mathbb{P}}}} \left[\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, D} \right]$$

הרי הקידור הלוקאלי $\mathbb{P}$ שהוא

הוא הקבוע המרבי.

הרעיון של הלוקאליזציה הפרטיתי k $B_{\mathbb{P}}$ (אזור פולינומי)

$\mathrm{im} := \mathbb{P} \cdot B_{\mathbb{P}}$

הוא g'. לכן $\boxed{v_{D'}(g') = 1.}$ ...

קיבלנו $\boxed{(\heartsuit)\ v_D(f) = 1.}$

שלב 5) לכל אידאל אחר E, הלוקאלי ב- L_0 ל- D,

כך כי $f|_{E \cap U_0} \neq 0$ (כלומר כי $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_0)$).

לכן f אי-פיר הפיך בחוג הלוקאלי

$\mathcal{O}_{U_0, E \cap U_0} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, E}$, ולכן

$$\boxed{v_E(f) = 0} \quad (\heartsuit\heartsuit)$$

שלב 6) לסיום

נראה כי $\boxed{v_{L_0}(f) = -d}$. זה יגרור שאם

$t_1 \leftrightarrow t_0$, זה אומר כי לפי הראשון ש-

$L_1 := Z_{\mathbb{P}^n}(t_1)$ כלומר $\boxed{v_{L_1}\left(\frac{h(\underline{t})}{t_1^d}\right) = -d}$,

ו- $t_1 f h(\underline{t})$. זה אומר הפיך כאן דאגנו (2)-(3) מספיק

אזור

לבדוק כי $v_{L_1}\left(\frac{t_1}{t_0}\right) = 1$ ו- $v_{L_1}\left(\frac{h}{t_0^d}\right) = 0$ כאן V מקרים בהתאם ל- $(\heartsuit)$ ו- $(\heartsuit\heartsuit)$

[זה בגלל h - אלקטרוני אמור שהוא כי $t_0 f$] $\square$

$h := g|_{t_0 \leftrightarrow t_1}$

ई।०