(85)

"המשפט על אידיאלים רדיקליים"

**משפט** יהי $\mathfrak{a} \subset k[\underline{t}]$ אידיאל. אז

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = I(Z(\mathfrak{a})).$$

הערה: זה אחד הניסוחים של משפט האפסים של הילברט.

ר' סוף הר' 30.3

הוכחה. ברור ש- $\mathfrak{a} \subset I(Z(\mathfrak{a}))$.

מאחר ש- $I(Z(\mathfrak{a}))$ הוא אידיאל רדיקלי, הרי

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(Z(\mathfrak{a})).$$

כל את ההכלה בכיוון השני. נסמן $A := k[\underline{t}]$.

אם כן יהי $f = f(\underline{t}) \in A - \sqrt{\mathfrak{a}}$

עלינו למצוא נקודה $\boxed{x \in Z(\mathfrak{a})}$ כך ש- $\boxed{f(x) \neq 0}$.

זה יראה ש- $f(\underline{t}) \notin I(Z(\mathfrak{a}))$.

נגדיר $\bar{A} := A/\mathfrak{a}$, ויהי

$\varphi : A \to \bar{A}$ ההומו' הקנוני.

נגדיר $\bar{f} := \varphi(f) \in \bar{A}$. מאחר ש- $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$,

הרי $\bar{f}$ איננו נילפוטנטי (בחוג $\bar{A}$). לכן

חוג הלוקליזציה $\bar{A}_{\bar{f}}$ איננו טריוויאלי.

יהי $\mathfrak{m}$ אידיאל מקסימלי בחוג $\bar{A}_{\bar{f}}$.

כעת נתבונן בהומו' החוגים

$\psi : A \to \bar{A}_{\bar{f}}$ .

נגדיר $\mathfrak{m} := \psi^{-1}(\bar{\mathfrak{m}})$, שהוא אידאל מקסימלי בחוג $A$.

ה- $\mathbb{k}$-אלגברה $\bar{A}_{\bar{f}}$ היא נוצרת סופית (ע"י היוצרים $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{f}^{-1}$). לכן ממשפט האפסים של הילברט, $\bar{A}_{\bar{f}} / \bar{\mathfrak{m}} \cong \mathbb{k}$ .

כעת יש הומו' של חוגים (אינקלוזיות)

$$\mathbb{k} \hookrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}} \overset{\bar{\psi}}{\hookrightarrow} \frac{\bar{A}_{\bar{f}}}{\bar{\mathfrak{m}}} ;$$

ולכן נובע ש: $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$ .

יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ הסקלרים כך ש-

$$\mathfrak{m} = (t_1 - \lambda_1, \dots, t_n - \lambda_n) \subset A = \mathbb{k}[\underline{t}] .$$

נגדיר $x := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{A}^n$ .

מאחר ש- $\psi(f) = \bar{f} \notin \bar{\mathfrak{m}}$ הרי $f \notin \mathfrak{m}$, ולכן

$$\boxed{f(x) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 .}$$

מצד שני, $\Psi(\mathfrak{a})=0$, ולכן

$\mathfrak{a} \subset \Psi^{-1}(\bar{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$ .

לכן לכל $\mathfrak{a} \ni g(\underline{t})$ מתקיים $g(x)=0$ .

מפה נובע ש- $\boxed{x \in Z(\mathfrak{a})}$ .

$\square$

<u>שאלה קצר</u> תהי $X \subset \mathbb{A}^n$ קבוצה סגורה,

ו- $A := \Bbbk[\underline{t}]/I(X)$. תהי $S \subset A$ תת-קבוצה

כך ש-

$$X = \bigcup_{f \in S} D(f) .$$

אז יש איברים $f_1, \dots, f_m \in S$ ו-

$g_1, \dots, g_m \in A$ כך ש-

$$1 = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i .$$

לכן

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} D(f_i) .$$

<u>הוכחה</u> נשתמש לפי הגדרה כי שייכים לאיברי $A$ הם הערכים $f(x)$, $x \in X$ של פונקציות רגולריות; זה מהגדרת האידיאל $I(X)$.

לכל בחירה הרמה כלשהי $\tilde{f}$ של $f$: קבוצה $\tilde{S} \subset \Bbbk[\underline{t}]$; כלומר לכל $f \in S$ בוחרים הרמה $\tilde{f} \in \Bbbk[\underline{t}]$.

נתבונן באידיאל

$$\mathfrak{b} := I(X) + \sum_{\tilde{f} \in \tilde{S}} (\tilde{f}) \subset \Bbbk[\underline{t}] .$$

אז

$$(\text{ב-} \mathbb{A}^n) \; Z(\mathfrak{b}) = X \cap \Big( \bigcap_{\tilde{f} \in \tilde{S}} Z(\tilde{f}) \Big)$$

$$= X - \Big( \bigcup_{f \in S} D(f) \Big) = \emptyset$$

לפי המשפט של האפסים של הילברט

אך אז

$$\sqrt{b} = I(Z(b)) = I(\emptyset) = k[\underline{t}]$$

(הגדרה) $1 \in \sqrt{b}$, ולכן גם $1 \in b'$.

לכן יש $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m \in \tilde{S}$ ו-

$\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m \in k[\underline{t}]$ כך ש-

$$1 \in I(X) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{f}_i \tilde{g}_i \in k[\underline{t}]$$

אז הרדוקציה מודולו $I(X)$ נותנת

$$1 = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i \in A,$$

כאשר $g_i := \tilde{g}_i + I(X)$,

לכל נקודה $x \in X$. אז

$$0 \neq 1 = 1(x) = \sum_i g_i(x) f_i(x)$$

ולכן יש $i$ כך ש- $0 \neq f_i(x) \Rightarrow x \in D(f_i)$.

מכאן, $X = \bigcup_{i=1}^{m} D(f_i)$.

∎

## משפט I

יהי $(X,\mathcal{O}_X)$ תת-יריעה סגורה של $\mathbb{A}^n$. אז ההעתקה הבאה

$$\Phi:\begin{cases}\mathbb{k}[\underline{t}]=\mathbb{k}[t_1,\dots,t_n]\to\mathcal{O}_X(X)\\ f\mapsto f|_X\end{cases}$$

משרה איזומורפיזם של אלגברות

$$\bar{\Phi}:\ \frac{\mathbb{k}[\underline{t}]}{I(X)}\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_X(X).$$

הוכחה. נסמן $A:=\mathbb{k}[\underline{t}]/\mathcal{O}_X(X)$.

ראינו כבר כי $I(X)=\ker(\Phi)$,

לכן $\bar{\Phi}$ אינג'קטיבית. צ"ל כי $\bar{\Phi}$ סורג'קטיבית, כלומר $\mathcal{O}_X(X)=A$.

(מזהה את $A$ כתת-חוג של $\mathcal{O}_X(X)$)

אם כן ניקח פונקציה רגולרית $f\in\mathcal{O}_X(X)$.

עפ"י הגדרה יש כיסוי פתוח $X=\bigcup_i U_i$,

ופולינומים $g_i,h_i\in\mathbb{k}[\underline{t}]$,

כך ש- $h_i(x)\neq 0$ ו- $f(x)=\frac{g_i(x)}{h_i(x)}$ לכל $x\in U_i$.

עפ"י עידון הכיסוי $\{U_i\}$ אפשר להניח כי $U_i=X\cap D(k_i)$ עבור $k_i\in\mathbb{k}[\underline{t}]$. כעת לכל $x\in U_i$ מתקיים

$$f(x)=\frac{g_i(x)\cdot k_i(x)}{h_i(x)\cdot k_i(x)}.$$

כמו כן

$$U_i=X\cap D(k_i)=X\cap D(k_i)\cap D(h_i)=X\cap D(h_i\cdot k_i).$$

סוף הגדרה

ו- $\quad a_i := k_i g_i + I(x) \in A$

$b_i := k_i h_i + I(x) \in A$ .

אז $\quad X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , $\quad U_i = D(b_i)$ ,

ו- $\quad \boxed{f(x) = a_i(x) / b_i(x)}$ (*) לכל $x \in U_i$ .

נעיר גם כי $\quad U_i = D(b_i) = D(b_i^2)$ .

לפי סופיות הכיסוי יש תת-קבוצה סופית $I' \subset I$

כך ש $\quad X = \bigcup_{i \in I'} D(b_i^2)$ ,

ויש $c_i \in A$ כך ש

(**) $\quad \boxed{1 = \sum_{i \in I'} c_i b_i^2 \in A}$ .

יהי $x \in U_i$ . אז $\quad f(x) b_i(x)^2 = a_i(x) b_i(x)$

מ- (*) .

יהי $x \in X - U_i$ . אז $\quad b_i(x) = 0 \Leftarrow$

$f(x) b_i(x)^2 = 0 = a_i(x) b_i(x)$

כלומר (***) $\quad \boxed{f(x) b_i(x)^2 = a_i(x) b_i(x) \text{ לכל } x .}$

ניקח $x$ כלשהו ב-$X$, ונכפיל את (*) ב-$f(x)$:

$$f(x) = f(x) \cdot \left( \sum_{i \in I'} c_i b_i^2 (x) \right)$$

$$= \sum_{i \in I'} (c_i f b_i^2)(x) = \sum_{i \in I'} (c_i a_i b_i)(x)$$

כלומר $f = \sum_{i \in I'} c_i a_i b_i \in A$ .

$\square$

## משפט II

יהיו $(X,\mathcal{O}_X)$ יריעה אלגברית אפינית ו-$(Y,\mathcal{O}_Y)$ מרחב עם פונקציות. אז ההעתקה

$$\Psi: \begin{cases} \mathrm{Hom}_{Sp(k)}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{Alg(k)}(\mathcal{O}_X(X),\mathcal{O}_Y(Y)) \\ f \mapsto f^* \end{cases}$$

הינה ביג'קציה טבעית.

**טענת עזר.** תהי $Y$ קבוצה. יהי $\varphi: k[t_1,\dots,t_n] \to k^Y$ הומ' של אלגברות, $y \in Y$ ו- $g(\underline{t}) \in k[\underline{t}]$. אז $\varphi(g(\underline{t}))(y) = g(\varphi(t_1)(y),\dots,\varphi(t_n)(y))$.

**הוכחה:** תרגיל.

**הוכחת המשפט.** אפשר להניח כי $X$ תת-יריעה סגורה של $\mathbb{A}^n$.

א. נראה כי $\Psi$ אינג'קטיבית. יהיו $f_1,f_2: Y \to X$ שני מורפיזמים שונים. אז יש נקודה $y \in Y$ כך ש- $f_1(y) \neq f_2(y)$. נסמן $x_i := f_i(y) \in X$. יש קואורדינטה $t_j$ כך ש- $t_j(x_1) \neq t_j(x_2)$.

כי

$$f_i^*(t_j)(y) = t_j(f_i(y)) = t_j(x_i)$$

לכל $i=1,2$. קיים $j$ כך ש- $f_1^*(t_j)(y) \neq f_2^*(t_j)(y)$,

כלומר $f_1^*(t_j) \neq f_2^*(t_j)$ ב- $\mathcal{O}_Y(Y)$; ולכן $f_1^* \neq f_2^*$.

ב. נוכיח כי $\Psi$ סורג'קטיבית. יהי

$\varphi: \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ הומו' של $K$-אלגבראות.

צריך למצוא מורפיזם $f: Y \to X$ כך ש-

$\varphi = f^*$.

נתבונן בפולינומים $t_1|_X, \ldots, t_n|_X \in \mathcal{O}_X(X)$, ונגדיר

$f_j := \varphi(t_j|_X) \in \mathcal{O}_Y(Y)$.

אזי נגדיר העתקה
ע"י הנוסחה

$$\begin{cases} f: Y \to \mathbb{A}^n \\ f(y) := (f_1(y), \ldots, f_n(y)). \end{cases}$$

אזי נוכיח כי:

(i) $f(Y) \subset X$

(ii) $f: X \to Y$ רגולרית

(iii) $f: X \to Y$ מורפיזם כי $S_f$([illegible]).

(iv) $f^* = \varphi$.

(i) : נתבונן בהומו' הטבעי $\tilde{\varphi} : \mathbb{k}[\underline{t}] \to \mathcal{O}_Y(Y)$
המוגדר ע"י:

$$\tilde{\varphi}(g(\underline{t})) := \varphi(g|_X) .$$

אז

$$f_j = \tilde{\varphi}(t_j) \in \mathcal{O}_Y(Y) .$$

נשים לב כי הנ"ל מקיים $I(X) \subset \ker(\tilde{\varphi})$.

ניקח פולינום $g(\underline{t})$ ונקודה [illegible] כלשהי $y \in Y$

מתקיים (לפי הגדרת הכפל):

$$(*) \quad \begin{aligned} g(f(y)) &= g(f_1(y), \dots, f_n(y)) = \\ &= g(\tilde{\varphi}(t_1)(y), \dots, \tilde{\varphi}(t_n)(y)) \\ &= \tilde{\varphi}(g(\underline{t}))(y) \end{aligned}$$

אבל $g(\underline{t}) \in I(X)$ מקיים $g(f(y)) = 0$.

כלומר ש- $f(y) \in Z(g(\underline{t}))$

$\Leftarrow$ $f(y) \in Z(I(X)) = X$

$\Leftarrow$ $f(Y) \subset X$.

לפי טענה 5.4 < רציפות

צ"ל כי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-Y. מספיק להראות כי

(ii) ניקח קבוצה פתוחה $U \subset X$

$U = X \cap D(g)$, עבור פולינום $g(\underline{t}) \in \mathbb{k}[\underline{t}]$. אז

$$f^{-1}(U) = \{ y \mid g(f(y)) \neq 0 \}$$

$$\underline{\text{לפי (*)}} = \{ y \mid \tilde{\varphi}(g(\underline{t}))(y) \neq 0 \} = D(\tilde{\varphi}(g(\underline{t})))$$

שהיא פתוחה ב-Y.

טענה (מורפיזם) ניקח קבוצה פתוחה $U \subset X$

ופונקציה רגולרית $g \in \mathcal{O}_X(U)$. אז כי

$$f^*(g) \overset{?}{\in} \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)).$$

אכן כן נבחר נקודה $y \in f^{-1}(U)$, ונראה כי $f^*(g)$ רגולרית בסביבת $y$. נסמן $x := f(y)$.

אז יש סביבה פתוחה $W$ של $x$ ב-$U$, ופולינומים $g_1(\underline{t}), g_2(\underline{t})$, כך ש-$g_2(x') \neq 0$, לכל $x' \in W$, ו-

$$g(x') = \frac{g_1(x')}{g_2(x')},$$

נגדיר $V := f^{-1}(W)$, שהיא סביבה פתוחה של $y$ בתוך $f^{-1}(U)$. יש פונקציות

$$\underbrace{\tilde{\varphi}(g_1(\underline{t}))}_{h_1 :=}, \underbrace{\tilde{\varphi}(g_2(\underline{t}))}_{h_2 :=} \in \mathcal{O}(Y),$$

ולכל $y \in Y$ מתקיים (לפי ...):

$h_i(y) = g_i(f(y))$. לכן

ולכל $y' \in V$ מתקיים:

$$h_2(y') \neq 0$$

ו-

$$f^*(g)(y') = g(f(y'))$$

$$= g_1(f(y'))/g_2(f(y'))$$

$$= \frac{h_1(y')}{h_2(y')}$$

רואים כי $f^*(g)|_V$ רגולרית.

97 (iv): צ"ל $\varphi = f^*$.

לכן נראה שוים ב- (*): נניח $\bar{g} \in \mathcal{O}_X(X)$;

צ"ל $f^*(\bar{g}) = \varphi(\bar{g})$. נזכור (כרגיל) את

$\bar{g}$ כפולינום $g(\underline{t}) \in k[\underline{t}]$ (כלומר $\bar{g} = g|_X$).

אז לכל $y \in Y$ מתקיים

$$f^*(\bar{g})(y) = \bar{g}(f(y)) = g(f(y))$$

לפי (*)

$$= \tilde{\varphi}(g(\underline{t}))(y) = \varphi(\bar{g})(y).$$

ולכן $f^*(\bar{g}) = \varphi(\bar{g})$.

$\square$

## משפט (קבוצות פתוחות ראשיות)

תהי $X$ יריעה אפינית, ותהי $f \in \mathcal{O}_X(X)$.
נגדיר $U := D(f)$ ו- $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$.
אז $(U, \mathcal{O}_U)$ יריעה אפינית, והומומורפיזם
של $\mathcal{O}_X(X)$-אלגברות

$$\varphi : \mathcal{O}_X(X)_f \to \mathcal{O}_U(U)$$

הוא איזומורפיזם.

נשים לב כי $f$ איבר הפיך בחוג $\mathcal{O}_U(U)$,
ולכן יש הומ' יחיד של $\mathcal{O}_X(X)$-אלגברות $\varphi$ כפי
שרשום במשפט.

**תרגיל.** יהיו $X$ ו- $Y$ מרחבים עם פונקציות,
ו- $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ תת-מרחבים (מבנה מושרה).
ויהי $f : X \to Y$ מורפיזם ב- $\mathrm{Sp}(\Bbbk)$ כך ש-
$f(X') \subset Y'$. אז $f|_{X'} : X' \to Y'$ מורפיזם
ב- $\mathrm{Sp}(\Bbbk)$.

(99) הוכחת המשפט. אפשר להניח כי $X$

תת-יריעה סגורה של $\mathbb{A}^n$, ונציין $\mathbb{k}[\underline{t}] := \mathbb{k}[t_1,\dots,t_n]$.

יהי $\mathfrak{a} := \mathcal{I}(X) \subset \mathbb{k}[\underline{t}]$.

נבחר יוצרים $g_1(\underline{t}),\dots,g_m(\underline{t})$ לאידיאל $\mathfrak{a}$.

לפי משפט I ידוע כי $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{k}[\underline{t}]/\mathfrak{a}$;

נבחר הרמה $\tilde{f}(\underline{t}) \in \mathbb{k}[\underline{t}]$ של $f$.

יש הכלה של חוגים

$$\mathbb{k}[\underline{t}] \subset \mathbb{k}[\underline{t}, t_{n+1}].$$

כך נגדיר אידיאל

$$\mathfrak{b} := (g_1(\underline{t}),\dots,g_m(\underline{t}), \tilde{f}(\underline{t})\cdot t_{n+1}-1) \subset \mathbb{k}[\underline{t}, t_{n+1}].$$

אך כלים יריעה אפינית

$$Y := \mathcal{Z}(\mathfrak{b}) \subset \mathbb{A}^{n+1}.$$

לפי משפט I שוב ידוע כי

$$\mathcal{O}_Y(Y) \cong \mathbb{k}[\underline{t}, t_{n+1}]/\mathcal{I}(Y), \quad (*)$$

ולפי המשפט של אפסים הילברט ידוע

כי $\mathcal{I}(Y) = \sqrt{\mathfrak{b}}$. $(**)$

(100)

נגדיר עכשיו איזומורפיזם של $\Bbbk[\underline{t}]$ - אלגברות

(**) $$\Psi : \Bbbk[\underline{t}, t_{n+1}]/\mathfrak{b} = \frac{\Bbbk[\underline{t}, t_{n+1}]}{(g_1, \ldots, g_n, \tilde{f} t_{n+1} - 1)}$$

$$\xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)_f = \left(\frac{\Bbbk[\underline{t}]}{\mathfrak{a}}\right)_f = \left(\frac{\Bbbk[\underline{t}]}{(g_1, \ldots, g_m)}\right)_f$$

על ידי ההגדרה של

$$\Psi(t_i) := \begin{cases} t_i & ; \quad 1 \le i \le n \\ 1/f & ; \quad i = n+1 \end{cases}.$$

ואז צמצום ההופכי $\Psi^{-1}$ נתון ע״י

$$\Psi^{-1}(t_i) = t_i \quad ; \quad 1 \le i \le n$$

$$\Psi^{-1}(1/f) = t_{n+1} .$$

נשים לב כי $\tilde{f}$ הפיך בחוג $\Bbbk[\underline{t}, t_{n+1}]/\mathfrak{b}$ ,
עם ההופכי כפלי $t_{n+1}$ .

החוג $\mathcal{O}_X(X)$ מצומצם ; ולכן גם
הלוקליזציה שלו $\mathcal{O}_X(X)_f$ (זה תרגיל קל).
מכאן נובע ש- (**) מעידים כי החוג $\Bbbk[\underline{t}, t_{n+1}]/\mathfrak{b}$
הינו מצומצם. לכן, בשילוב עם (†), מסיקים
כי $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{b}} = I(Y)$ .

(10) לכן, עפ״י $(**)$ ו- $V, U$ איזומ׳ כ- $k[\underline{t}]$-אלג׳

$$(*) \quad \boxed{\psi: \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)_f}$$

וכמו כן, גיאומטרית אנו מקבלים ש-

$h: Y \to U$ איזומורפיזם

בקטגוריה $\mathfrak{Sp}(k)$, כך שהדיאגרמה

$$(\heartsuit) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & U \\ {\scriptstyle \text{הכלה (סגור)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{הכלה (פתוח)}} \\ \mathbb{A}^{n+1} & \xrightarrow{p} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

היא קומוטטיבית. כאן

$p: \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^n$

היא ההטלה $p(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n)$.

תחילה נשים לב כי, כפונקציות בין קבוצות,

$p(Y) = U$, ו- $h := p|_Y : Y \to U$

היא בייקטיבית. כך קיבלנו פונקציה $h$

שעבורה הדיאגרמה $(\heartsuit)$ קומוטטיבית. עתה נראה,

$h: Y \to U$ מורפיזם ב- $\mathfrak{Sp}(k)$.

נוכיח רק שמורפיזם ו

$$g := h^{-1} : U \to Y$$

הוא

$$g(a_1,\dots,a_n) = \left(a_1,\dots,a_n, \frac{1}{f(a_1,\dots,a_n)}\right).$$

אנו צריכים להוכיח כי $g$ מורפיזם של אפינים.

נתבונן בהה׳ של $k[t]$-אלגברות

$$\varphi \circ \psi : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_U(U).$$

( $\psi$ היא מ- (**) ו- $\varphi$ הוא מעבר למנות המלבה.)

מאחר ו- $Y$ יריעה אפינית, לפי משפט II

יש מורפיזם $g' : U \to Y$

כך ש- $g'^{*} = \varphi \circ \psi$.

אנו נראה כי $g' = g$ ; ולכן $g$

מורפיזם.

אכן יהי נקודה $x = (a_1,\dots,a_n) \in U$.

אז לכל $i \in \{1,\dots,n+1\}$ מתקיים

$$t_i(g'(x)) = g'^{*}(t_i)(x) = (\varphi\circ\psi)(t_i)(x) =$$

$$= \begin{cases} t_i(x) = a_i & ; \ i \le n \\ 1/f(a_1,\dots,a_n) & ; \ i = n+1 \end{cases} = t_i(g(x))$$

לכן $g'(x) = g(x) \Rightarrow g' = g.$ ∎

סוף

GL