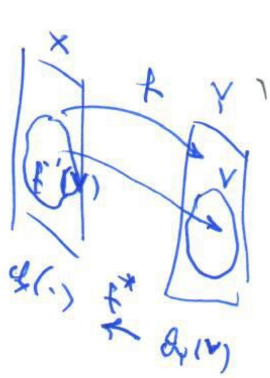
32

נזכיר שבהינתן פונקציה $f: X \to Y$
בין שתי קבוצות, ישנו הומומורפיזם של K-אלגברות
$f^*: K^Y \to K^X$, שהוא ההעתקה לאחור:
$f^*(g) := g \circ f : X \to K$.

<u>הגדרה</u>. יהיו $(X, \mathcal{O}_X)$ ו- $(Y, \mathcal{O}_Y)$ שני מרחבים עם פונקציות מעל שדה K. <u>מורפיזם</u> של <u>מרחבים</u> עם <u>פונקציות</u> $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ הוא העתקה רציפה $f: X \to Y$ כך שלכל קבוצה פתוחה $V \subset Y$ מתקיים

$$f^*(\mathcal{O}_Y(V)) \subset \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)).$$



<u>טענה</u> 1. יהיו X ו- Y מרחבים טופולוגיים, ונניח את $\mathcal{O}_X$ ו- $\mathcal{O}_Y$ להיות אלגברות הפונקציות הרציפות ל- $\mathbb{R}$. ניקח העתקה רציפה $f: X \to Y$.
תהי $V \subset Y$ קבוצה פתוחה. תהי $g: V \to \mathbb{R}$ פ' רציפה.
אז $f^*(g) = g \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ רציפה.
לכן $f^*(\mathcal{O}_Y(V)) \overset{?}{\subset} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$. כלומר f הוא מורפיזם של מרחבים עם פונקציות.

<u>דוגמה 2</u>. X ו- Y יריעות דיפ'. $f: X \to Y$ העתקה ד"פ.
$\mathcal{O}_X$ ו- $\mathcal{O}_Y$ אלגברות הפונקציות הדיפ' ל- $\mathbb{R}$. אז
$f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ מורפיזם.
(בקבלת טריוויאליות של "דיפרנציאביליות" :)

הגדרה יהי K שדה. הקטגוריה של **מרחבים עם פונקציות** מעל K, שסימונה $\underline{Sp}(K)$,
מוגדרת כך: האובייקטים הם המרחבים עם פונקציות
$(X, \mathcal{O}_X)$ מעל השדה K, והמורפיזמים הם המורפיזמים
מההגדרה האחרונה.

דוגמה נתבונן בפונקטור

$$F : \underline{Top} \to \underline{Sp}(\mathbb{R})$$

שמוגדר כך: בהנתן מרחב טופולוגי X, נגדיר
$FX := (X, \mathcal{O}_X)$ להיות המרחב עם פונקציות שבו
$\mathcal{O}_X$ היא אלומת הפונקציות הרציפות ל- $\mathbb{R}$. אז F
פונקטור נאמן ומלא. (F על פונקציות ברור.)

הוכחה. לפי הדוגמה הקודמת,

$$\mathrm{Hom}_{\underline{Top}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\underline{Sp}(\mathbb{R})}(FX, FY)$$

∎

משפט
נתבונן בפונקטור

$$F : \underline{Mfld}(\mathbb{R}, C^\infty) \to \underline{Sp}(\mathbb{R})$$

ששולח יריעה דיפ' X למרחב $(X, \mathcal{O}_X)$,
שבו $\mathcal{O}_X$ הוא אלומת הפ' הגז' עם ערכים ב- $\mathbb{R}$.
(הפעולה של F על העתקות ברורה) אז F פונקטור
נאמן ומלא.

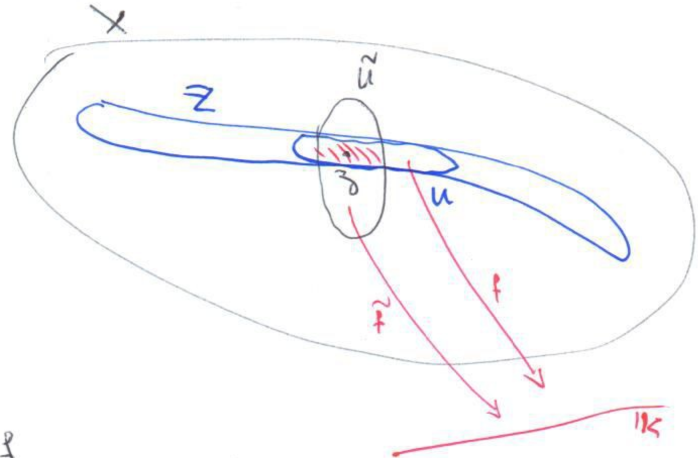
הוכחה. ברור כי F פונקטור נאמן; גם F
מלא. זהו **תרגיל**.

תת-מרחבים

יהי $(X,\mathcal{O}_X)$ מרחב עם פונקציות מעל שדה $\Bbbk$.
פונקציה $f \in \mathcal{O}_X(U)$ תיקרא פונקציה רגולרית על U.

הגדרה יהי $(X,\mathcal{O}_X)$ מרחב עם פונקציות מעל שדה $\Bbbk$, ויהי Z תת-קבוצה של X. נצייד את Z עם טופולוגיית תת-המרחב. תהי U קבוצה פתוחה ב-Z.

1) תהי $f : U \to \Bbbk$ פונקציה, ותהי $z \in U$ נקודה. אומרים כי f רגולרית ליד z אם יש קבוצה פתוחה $\tilde{U}$ ב-X, ופונקציה רגולרית $\tilde{f} : \tilde{U} \to \Bbbk$, כך ש- $z \in \tilde{U} \cap Z \subset U$ ו- $\tilde{f}|_{\tilde{U}\cap Z} = f|_{\tilde{U}\cap Z}$.



2) תהי $f : U \to \Bbbk$ פונקציה. אומרים כי f רגולרית אם היא רגולרית בסביבת כל נקודה $z \in U$.

3) נסמן $\mathcal{O}_X|_Z(U) := \{$ פונקציות רגולריות $f : U \to \Bbbk \}$.

(34.1)

טענה: $(X,\mathcal{O}_X)$ מרחב עם פונקציות, Z תת-קבוצה,
$U \subset X$ פתוחה, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ אז

$$f|_{U\cap Z} \in \mathcal{O}_X|_Z(U\cap Z).$$

הוכחה. זה מיידי מההגדרה.

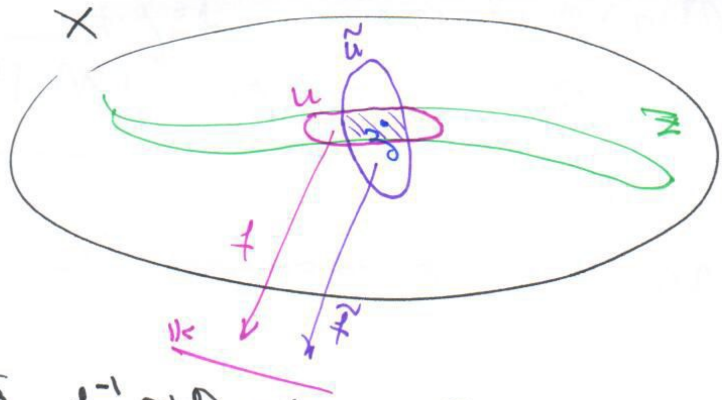
$\square$

(35) **משפט** $\mathcal{O}_X|_Z$ היא אלומת חוגי פונקציות
על Z, ו- $(Z,\mathcal{O}_X|_Z)$ מרחב עם פונקציות מעל k!

__הוכחה.__ העובדה ש- $\mathcal{O}_X|_Z$ אלומה נובעת מיד
מכך שההגדרה היא __מקומית__.

תהא נקודה $U \subset X$ פתוחה ו- $f \in \mathcal{O}_X|_Z(U)$
צ"ל כי $D(f)$ פתוחה ב- Z ו- $f|_{D(f)}$
הפיכה ב- $\mathcal{O}_X|_Z(D(f))$.

קודם נראה ש- $D(f)$ פתוחה. ניקח $z \in D(f)$.
יש סביבה פתוחה $\tilde{U}$ ב- X ופונקציה $\tilde{f} \in \mathcal{O}_X(\tilde{U})$
כך ש- $\tilde{f}|_{Z\cap\tilde{U}} = f|_{Z\cap\tilde{U}}$ ו- $z \in \tilde{U}\cap Z \subset U$.
מאחר ש- $\tilde{f}$ רגולרית, הרי $D(\tilde{f})$ פתוחה ב- X;
ולכן $W := D(\tilde{f}) \cap Z = D(f) \cap \tilde{U}$ פתוחה ב- Z.
ובנוסף $z \in W \subset D(f)$. זה מוכיח ש- $D(f)$ פתוחה.



עכשיו מבינים שהפונקציה $f^{-1}: D(f) \to k$ צ"ל
שהיא רגולרית. קריטריון הגבולות המקומית יתקיים
כי $\tilde{f}|_{D(\tilde{f})}$ הפיכה; ונסמן ב- $\tilde{g}$ את ההופכית $\Rightarrow$

(3ב) אזי. כלומר, $\tilde{g} \in \mathcal{O}_X(D(\tilde{f}))$ ו-

$\tilde{g} \cdot \tilde{f}|_{D(\tilde{f})} = 1$.

נגדיר $g := \tilde{g}|_W$. אזי $g \in \mathcal{O}_{X|_Z}(W)$

ו- $g \cdot f|_W = 1$.

אם כן $g = f^{-1}|_W$, ולכן f^{-1} רגולרית

ב- W, כלומר f^{-1} רגולרית ליד p.

ואכן p ב- $D(f)$ שרירותי; ולכן f^{-1} רגולרית ב-

$D(f)$. $\square$

לשאלה ←
3א