

תרגיל 2

1. חמישה כדורים המסומנים בספרות 1,2,...,5 מכניסים באופן מקרי לשלוש קופסאות הממוספרות ב- a, b, c . תאר את מרחב המדגם. מצא את ההסתברויות של המאורעות הבאים: A_1 : "קופסה a ריקה", A_2 : "קופסה a ואך ורק היא ריקה", A_3 : "בדיוק קופסה אחת ריקה", A_4 : "לפחות קופסה אחת ריקה", A_5 : "אין קופסאות ריקות", A_6 : "קופסה a או קופסה b ריקות".
2. חמישה קלפים המסומנים בספרות 1,2,...,5 מונחים באופן מקרי בשורה. מצא את ההסתברויות של המאורעות הבאים: A_1 - "קלף ה-1 נמצא במקום הראשון", A_2 - "קלף ה-2 נמצא אחרי קלף ה-3", A_3 - "קלף ה-1 לא נמצא במקום הראשון, קלף ה-2 לא נמצא במקום השני", A_4 - "קיימות בדיוק שלוש התאמות בין מספרי הקלפים ומקומם בשורה",
3. קופסה מכילה 15 קלפים שונים. בוחרים באופן מקרי 10 קלפים עם החזרה. מצא את ההסתברות שכל הקלפים הנבחרים שונים.
4. N אנשים שבינם אברהם ויצחק ממוקמים בשורה באופן מקרי. מהי ההסתברות שבין אברהם ויצחק יפרידו בדיוק R אנשים ($R \leq N - 2$).
5. קופסה מכילה שלושה כדורים שחורים ושבעה לבנים. בוחרים מהקופסה באופן מקרי וללא החזרה ארבעה כדורים. מצא את ההסתברות שבמדגם נמצאים לפחות שני כדורים שחורים.
6. בארון מונחים עשרה זוגות נעליים שונים. בוחרים מהארון באופן מקרי וללא החזרה ארבע נעליים. מצא את ההסתברויות של המאורעות הבאים: A_1 - לקבל בדיוק זוג אחד של נעליים תואמים, A_2 - לקבל שני זוגות, A_3 - לא לקבל אף זוג אחד.
7. $2n$ בנים ו- $2n$ בנות מחולקים באופן מקרי בין שתי כיתות שוות גודל. מצא את ההסתברויות שבכל כיתה יהיה מספר שווה של בנים ובנות.
8. שחקן מרוויח \$1 כאשר בהטלת מטבע סימטרי מתקבל "עץ" ומפסיד \$1 במקרה השני. לשחקן היו $2n$ דולרים לפני המשחק. מצא את ההסתברות שאחרי $2n$ הטלות לשחקן יהיה אותו הסכום.
9. מטילים קובייה סימטרית 36 פעמים. מצא את ההסתברות שנקבל כל מספר על הקובייה שש פעמים.
10. בכיתה 20 תלמידים. מצא את ההסתברות שקיימים ארבעה חודשים שבכל אחד מהם חל יום הולדת לשלושה תלמידים בכיתה ובכל אחד משאר החודשים חל יום הולדת לתלמיד אחד בלבד.
11. (בעיית ימי ההולדת) בכיתה k תלמידים. מהי ההסתברות שבכיתה יש לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו תאריך. חשב את ההסתברות עבור $k = 20, 30$.
12. לאדם יש צרור של n מפתחות שונים, שרק אחד מהם פותח את דלת ביתו. הוא בוחר באקראי מפתח ומנסה לפתוח את הדלת. מהי ההסתברות שהוא יצליח בפעם ה- k -ית, אם (א) הוא משליך כל מפתח שנוסה ולא פתח את הדלת? (ב) הוא מחזיר לצרור כל מפתח שנוסה ולא פתח את הדלת?

תרגיל 2. תשובות

1. $P(A_6) = 2P(A_1) - \frac{1}{3^5}$, $P(A_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$, $P(A_2) = \frac{(2^5 - 2)}{3^5}$, $P(A_3) = 3P(A_2)$, $P(A_4) = P(A_3) + \frac{1}{3^4}$, $P(A_5) = 1 - P(A_4)$.
2. $\frac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}$
3. $P(A_1) = \frac{1}{5}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{13}{20}$, $P(A_4) = \frac{1}{12}$
4. $\frac{(15)_{10}}{15^{10}}$
5. $\frac{2(N-R-1)}{N(N-1)}$
6. $\frac{1}{3}$
7. $\frac{96}{323}$, $\frac{3}{323}$, $\frac{224}{323}$
8. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}$ (ב) $\frac{1}{n}$ (א)
9. $0.411, 0.706$
10. $\frac{\binom{12}{4} \cdot 20!}{(3!)^4 12^{20}}$
11. $\frac{36!}{(6!)^6 6^{36}}$
12. $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$