

## 5 תרגיל

1. כד מכיל  $N$  כדורים לבנים ו- $M$  כדורים שחורים. מוציאים מהכד באקראי כדור אחר כדור עד שמתקבל כדור שחור. אם הבחירה היא עם החזרה, מהי ההסתברות שיידרשו לכך (א) בדיוק  $n$  הוצאות כדור (ב) לפחות  $k$  הוצאות כדור (ג) מספר זוגי של הוצאות כדור.
2. מרכזות טלפונית מקבלת בממוצע 20 שיחות בינעירוניות במשך שעה אחת. מצא את ההסתברות שלא יהיו שיחות בינעירוניות במשך 5 דקות (מספר השיחות הוא זרם פואסוני).
3. מספר אנשים  $X$  הפונים ללשכת המידע במשך שעה אחת מתפלג פואסוני עם פרמטר  $\lambda$   
 $(k=0,1,\dots, P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!})$ . כל אחד מהפונים מקבל תשובה נכונה בהסתברות  $p$  ותשובה שגויה בהסתברות  $q=1-p$ . מצא את פונקציית ההסתברות של מספר האנשים  $Y$  המקבלים תשובה שגויה.
4. במניית חלקיקי  $\alpha$  נמנים במשך 10000 שניות 2500 חלקיקים בממוצע. מצא את ההסתברות שלפחות 3 חלקיקים ייספרו במשך 10 שניות. (מספר חלקיקי  $\alpha$  הוא זרם פואסוני).
5. נתונה פונקציית צפיפות של מ"מ  $X: f(x) = k(x+3)$ , אם  $2 < x < 8$ , ו- $f(x) = 0$  אחרת. (א) מצא את  $k$  (ב) חשב  $P(3 < X < 5)$ .
6. נתונה פונקציית צפיפות של מ"מ  $X: f(x) = cx^2$ , אם  $0 < x < 5$ , ו-0 אחרת. (א) מצא את  $c$  (ב) מצא את  $k$  כך ש- $P(X < k) = 1/3$  (ג) מצא את פונקציית ההתפלגות של מ"מ  $X$ .
7. מצא את  $a$  כך שפונקציה  $f(x) = a|x|e^{-x^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ , תהיה פונקציית צפיפות.
8. אורך חיי נורה (בשעות)  $X$  מפולג לפי פונקציית הצפיפות:  
 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-x/1000}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ . (א) מצא את פונקציית ההתפלגות של מ"מ  $X$ . (ב) מצא את ההסתברות שהנורה תחיה בין 800 ל-1200 שעות.
9. תהיה  $A$  נקודה הנבחרת באופן מקרי ואחיד בקטע  $[0,1]$  ומחלקת אותו לשני חלקים  $[0,A]$  ו- $[A,1]$ . נסמן ב- $X$  את אורכו של חלק הקטן ביותר. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי  $X$ .
10. על מעגל עם רדיוס 1 נמצאות שתי נקודות שאחת קבועה והשנייה מפולגת באופן מקרי ואחיד בכל המעגל. נסמן ב- $X$  את אורכו של מיתר המחבר שתי נקודות אלה. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי  $X$ .
11. אורך חיי מנוע (בשעות) מפולג מעריכית עם פרמטר  $\lambda$ .  $M$  מנועים זלוקים במשך  $1/\lambda$  שעות. מצא את ההסתברות שאף מנוע לא יתקלקל.
12. בבית חרושת שלוש מכונות. מכונה A מייצרת 10% מהתוצר הכולל ופוגמת ב-4% מן המוצרים. מכונה B מייצרת 60% ופוגמת ב-7% ומכונה C מייצרת 30% ופוגמת ב-5%. בהוצאה מקרית של מוצר: (א) מה ההסתברות שהוא פגום? (ב) אם המוצר פגום, מה ההסתברות שהוא הוצא ממכונה A? (ג) אם המוצר פגום, מה ההסתברות שלא הוצא ממכונה C?

### תרגיל 5. תשובות

1. (א)  $\frac{M \cdot N^{n-1}}{(M+N)^n}$  (ב)  $\left(\frac{N}{M+N}\right)^{k-1}$  (ג)  $\frac{N}{M+2N}$  2.  $e^{-5/3}$  3.  $P(Y=k) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!}$ ,  $k=0,1,\dots$
4. 0.456 5. (א)  $1/48$  (ב)  $7/24$  6. (א)  $3/125$  (ב)  $5/\sqrt[3]{3}$  (ג)  $t^3/125$ ,  $0 \leq t \leq 5$  7.  $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^3/125, & 0 \leq t \leq 5 \\ 1, & t > 5 \end{cases}$
7. 1 8. (א)  $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/1000}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$  9.  $X \sim U\left(0, \frac{1}{2}\right)$  0.148 (ב)
10.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2/4}}, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$  11.  $e^{-M}$  12. (א) 0.061 (ב)  $\frac{4}{61}$  (ג)  $\frac{46}{61}$