

תרגיל 9

1. יהי $X \sim \text{Exp}(1)$ ויהי $Y = e^{2X/3}$. (א) חשב את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y (ב) מצא $E(Y), V(Y)$.
2. יהי X מ"מ בעל פונקציית צפיפות $f(x) = a(1 + |x-2|)$, $-1 \leq x \leq 4$; 0 אחרת. מצא: (א) את a (ב) את פונקציית הצפיפות של מ"מ $Y = X^2$, (ג) את $E(Y)$.
3. יהי $X \sim U(-1,1)$ ויהי $Y = (X - 0.5)^2$. מצא את פונקציית צפיפות של מ"מ Y ו- $E(Y)$.
4. מטילים מטבע סימטרי 3 פעמים. נסמן ב- X את מספר הצלחות בשתי הטלות הראשונות, ב- Y את מספר הצלחות בכל שלוש הטלות. מצא את פונקציית הסתברות המשותפת ואת פונקציות הסתברות השוליות.
5. נתונה פונקציית צפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & 0 < x, y < 1, 0 < x+y < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ (א) מצא את c (ב) מצא את פונקציות הצפיפות השוליות (ג) מצא את $V(X), E(X)$ (ד) האם X, Y בלתי תלויים?
6. נתונה פונקציית צפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}x(x+y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$. מצא את $P\{(X,Y) \in A\}$. כאשר $A = \{(x,y) : 0 < x < 0.5, 1 < y < 2\}$.
7. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (x+y), & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$. מצא את פונקציית ההתפלגות המשותפת.
8. מטילים מטבע שלוש פעמים. יהיו X מספר העצים בשתי הטלות הראשונות ו- Y מספר העצים בשתי הטלות האחרונות. (א) מצא את פונקציית הסתברות המשותפת ואת פונקציות השוליות של X, Y . האם מ"מ X, Y בלתי תלויים? (ב) חשב את $P(X=Y)$ (ג) חשב את מקדם המתאם $\rho(X,Y)$. (ד) חשב את $V(X-Y)$ (ה) חשב את ההסתברויות $P(X=2/Y=1), P(X=1/Y=1), P(X=0/Y=1)$.

תרגיל 9. תשובות

1. (א) $f_Y(y) = 1.5y^{-2.5}$, $0 < y < \infty$; אחרת. 0, 3 (ב) $a = 2/23$ (א) $E(Y) = 7/12$, $f_Y(y) = \begin{cases} 1/2\sqrt{y}, & 0 < y \leq 0.25 \\ 1/4\sqrt{y}, & 0.25 < y \leq 2.25 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ (ג) $559/138$ (א) $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{6}{23\sqrt{t}}, & 0 < t < 1 \\ \frac{3}{23\sqrt{t}} - \frac{1}{23}, & 1 < t \leq 4 \\ \frac{1}{23} - \frac{1}{23\sqrt{t}}, & 4 < t < 16 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$
2. (א) $f_Y = f_X, f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ (ב) $V(X) = 1/18, E(X) = 1/3$ (ג) $11/80$ (ד) תלויים. 0.6

| | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|----------|
| | x | 0 | 1 | 2 | $p_Y(y)$ |
| y | 0 | 1/8 | 0 | 0 | 1/8 |
| 1 | 1/8 | 1/4 | 0 | 3/8 | |
| 2 | 0 | 1/4 | 1/8 | 3/8 | |
| 3 | 0 | 0 | 1/8 | 1/8 | |
| $p_X(x)$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 | 1 | |

4. $F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ or } y \leq 0 \\ xy(x+y)/2, & 0 < x, y < 1 \\ x(x+1)/2, & 0 < x < 1, y \geq 1 \\ y(y+1)/2, & 0 < y < 1, x \geq 1 \\ 1, & x, y \geq 1 \end{cases}$ 7.

(א)

| | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|----------|
| | x | 0 | 1 | 2 | $p_Y(y)$ |
| y | 0 | 1/8 | 1/8 | 0 | 1/4 |
| 1 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 1/2 | |
| 2 | 0 | 1/8 | 1/8 | 1/4 | |
| $p_X(x)$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 | 1 | |

8.

(ב) $\frac{1}{2}$ (ג) $\frac{1}{2}$ (ד) $\frac{1}{2}$ (ה) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$