$\boxed{\text{תרגיל 6}}$

סטטיסטיקה מתמטית

1. בדוק האם סטטיסטי U הוא מספיק עבור θ?

a. $B(1,p)$, $\theta=p$, $n=3$, $U=X_1+2X_2+X_3$

b. $U_d(N)$, $\theta=n$, $U=\max\limits_{1\le k\le n} X_k$, $U=\min\limits_{1\le k\le n} X_k$

c. $N(0,\sigma^2)$, $\theta=\sigma^2$, $U=\sum\limits_k X_k^2$, $U=\sum\limits_k X_k$

d. $Beta(a,1)$, $\theta=a$, $U=\sqrt[n]{X_1\cdot\ldots\cdot X_n}$

e. $N(0,\sigma^2)$, $\theta=\sigma$, $U=\sum\limits_k X_k$

2. מצא סטטיסטי מספיק עבור θ.

a. $G(p)$, $\theta=\frac{1}{p}$, $\theta=p$, b. $Exp(\lambda)$, $\theta=\frac{1}{\lambda}$, $\theta=\lambda$

c. $P(\lambda)$, $\theta=\frac{1}{\lambda}$, $\theta=\lambda$, d. $\Gamma(\alpha,\lambda)$, λ ידוע, $\theta=\alpha$

f. $Beta(a,b)$, $\theta=a=b$, e. $\Gamma(\alpha,\lambda)$, α ידוע, $\theta=\lambda$

3. מדגם $(X_1,\ldots,X_n)$ נלקח מהתפלגות

$$f(x,\theta)=\begin{cases}2-\theta, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ \theta, & \frac{1}{2}<x\le 1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

נ"מ T מונה מספר ה-X_k השייכים ל-$[\frac{1}{2},1]$

בדוק ש-T הוא מספיק עבור פרמטר θ

ונמצא את התפלגותו של T.

4. התפלגות מעריכית מוזזת בעלת צפיפות

$$f(x,a,\lambda)=\lambda\exp(-\lambda(x-a))\cdot I_{[a,+\infty)}(x)$$

מצא סטטיסטיים מספיקים עבור a ו-λ!

פתרונות   סטטיסטיקה מתמטית   תרגיל 6

1.

a) $U = X_1 + 2X_2 + X_3$

U	0	1	2	...
$f_U(x)$	q^3	pq^2+pq^2	p^2q+pq^2	
	(000)	(100) (001)	(101) (010)	

$$P\{(101) \mid U = 2\} = \frac{p^2 q}{pq} = p$$

תלוי בp

U אינו מספיק.

b) $\theta = N,\ U_d(N)$

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N^n},\quad x_k = 1,2,\dots,N,\quad k = 1,2,\dots,n$$

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{N^n} I_{\{1,2,\dots,N\}}(\tilde{x})$$

$$\tilde{x} = \max(x_1 \dots x_n)$$

מספיק $U = \tilde{X} = \max_k X_k$

$$\underset{\sim}{X} = U = \min X_k$$

$$P\{X_1 = 1, \dots, X_n = 1 \mid \underset{\sim}{X} = 1\} = \frac{\frac{1}{N^n}}{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n} = \frac{1}{N^n - (N-1)^n}$$

תלוי ב N אם $n > 1$

$U = \underset{\sim}{X}$ לא מספיק

$\textcircled{2}$

c. $N(0,\sigma^2)$ $\quad \theta=\sigma^2 \quad U_2=\sum_k X_k^2$

$$f_{X_1\ldots X_n}(x_1\ldots x_n,\theta)=\underbrace{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta})^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_k x_k^2}}_{g(\theta,u)}$$

$u=\sum_k x_k^2$,

$U_1=\sum_k X_k^2$ מספיק

$$f_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n \mid U_2=u)=\frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta})}\, e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_k x_k^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi n\theta}}\, e^{-\frac{1}{2\theta n}\sum_k x_k}}$$

$U_2=u$

$U_2=\sum_k X_k$

U_2 אינו מספיק $\quad$ תלוי ב-θ

d)

$$f(x,a)=ax^{a-1},\quad 0<x<1$$

$$L=\underbrace{a^n\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{a-1}}_{=}\cdot\underbrace{I_{[0,1]}(\tilde{x})\cdot I_{[0,1]}(\tilde{x})}_{h(x_1\ldots x_n)}$$

$$\underbrace{\left(a^n\cdot\left(\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\right)^{n(a-1)}\right)}_{g(u,a)} \qquad u=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$$

U מספיק

e. $\theta=\sigma$ $\quad U=\sum_k X_k$ לא מספיק

e) $\sigma\to\sigma^2$ חד-חד ערכי

ו U לא מספיק עבור σ

3

2) .

a)

$$f(x,p) = p(1-p)^x \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$L = p^n (1-p)^{\sum_k x_k}$$

$$\underline{\theta = p}$$

$$u = \sum_k x_k \qquad h(x_1 \dots x_n) = 1$$

$$g(u,p) = p^n (1-p)^u$$

$p \to \frac{1}{p}$ חד-חד ערכית

$$\underline{\theta = \frac{1}{p}}$$

$U = \sum_k X_k$ מספיק

b)

$$L = \underbrace{\lambda^n e^{-\lambda(\sum x_k)}}_{g} \underbrace{I_{[0,+\infty)}(\underline{x})}_{h}$$

$\lambda \to \frac{1}{\lambda}$ חד-חד ערכית

$U = \sum X_k$ מספיק

c) .

$$L = \frac{\lambda^{\sum_k x_k}}{x_1! \dots x_n!} e^{-n\lambda}$$

$U = \sum_k X_k$ מספיק

d)

$$L = \underbrace{\frac{(\lambda^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha)^n} \cdot \left(\prod_k x_k\right)^{\alpha-1}}_{g} \underbrace{e^{-\lambda \sum x_k}}_{h}$$

$\underline{\lambda \text{ ידוע}}$

$$U = \prod_{k=1}^{n} X_k$$

e) .

$$U = \sum_k X_k$$

$$L = \frac{1}{B(a,a)} \left(\prod_k \left(x_k (1-x_k)\right)\right)^{a-1}$$

f) .

$U = \prod_k \left(X_k (1-X_k)\right)$ מספיק

3.

$$Y_k = I_{\{X_k \in [\frac{1}{2}, 1]\}}$$

$$T = \sum_k Y_k$$

$$p = P\{Y_k = 1\} = P\{X_k \in [\tfrac{1}{2}, 1]\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \theta \, dx = \frac{\theta}{2}$$

$$T \sim B(n, p)$$

כאשר $p = \frac{\theta}{2}$

$$L = (2-\theta)^{n-t} \, \theta^{t}$$

$$t = \sum_k y_k$$

$$y_k = \begin{cases} 0, & x_k \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x_k \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$T = \sum Y_k$ מספיק

4.

$$L = \lambda^n e^{-\lambda \sum_k x_k} \cdot e^{n \lambda a} \, I_{[a, +\infty)}(\underset{\sim}{x})$$

$$\underset{\sim}{x} = \min_k x_k$$

אם λ ידוע $\underset{\sim}{X} = \min X_k$ מספיק עבור a

אם a ידוע $\sum_k X_k$ מספיק עבור λ

$(\underset{\sim}{X}, \sum_k X_k)$ מספיק עבור (a, λ)