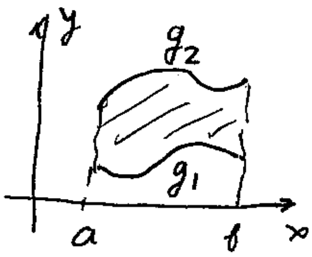
# סטטיסטיקה מתמטית | תרגיל 7

**1.** בדוק את השוויון

$$VY = E(Y - E(Y|X))^2 + E(E(Y|X) - EY)^2$$

**2.** $(X, Y)$ בעל התפלגות אחידה דו-ממדית בתחום $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} = \{(x,y):\ a \le x \le b\ ,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$




$g_1$ ו $g_2$ פונקציות רציפות על $[a, b]$.

a) חשב את $f_X(x)$ (צפיפות שולית של $X$)

b) מצא את $f_Y(\ |X=x)$ (צפיפות מותנית של $Y$ בתנאי ש $X=x$).

c) מצא $E(Y|X=x)$ ו $E(Y|X)$ !

**3.** $(X_1 \dots X_n)$ מדגם בגודל $n$ מהתפלגות $f(x)$. $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$, בדוק ש $E(X_i | U) = \frac{U}{n} = \bar{X}$ !

**4.** $(X, Y)$ בעל צפיפות משותפת

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2} e^{-\frac{x+y}{\theta}} , & 0 \le x \le y < +\infty \\ 0 , & \text{אחרת} \end{cases}$$

a) בדוק ש $X \sim Exp\left(\frac{2}{\theta}\right)$

b) בדוק ש- $(Y - x)\big|_{X=x} \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$ לכל $x > 0$

c) בדוק ש $E(Y|X=x) = x + \theta$, $E(Y|X) = X + \theta$, $EY = \frac{3}{2}\theta$, $V(E(Y|X)) = \frac{\theta^2}{4}$ !

# תרגיל 7

5. נלקח מדגם $(X_1, X_2, X_3)$ בגודל $n=3$ מהתפלגות בינומית $B(1,p)$.

$U = X_1 + X_2 + X_3$ , $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ , $\tau = \tau(p) = p^3$

a. בדוק ש-$T$ אומד ב"מ עבור $\tau$.

b. בדוק ש-$U$ סטטיסטי מספיק עבור $p$.

c. שפר $T$ על-ידי $U$, כ"א חשב $E(T|U)$
האם $T^* = E(T|U)$ יותר טוב מ-$T$?

d. האם $T^*$ הוא יעיל? חשב $eff_{T^*}(p)$

6. נלקח מדגם בגודל $n$ מהתפלגות פואסון $P(\lambda)$. המדגם $(X_1 \dots X_n)$

$T = I_{\{X_1 = 0\}}$ , $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$ , $\tau = e^{-\lambda}$

a. בדוק ש-$T$ אומד ב"מ עבור $\tau$.

b. בדוק ש-$U$ סטטיסטי מספיק עבור $\lambda$.

c. חשב $T^* = E(T|U)$

# סטטיסטיקה מתמטית | תרגיל 7 | פתרונות

**.1**

$$A = E\left(Y - E(Y|X)\right)^2 + E\left(E(Y|X) - EY\right)^2 =$$

$$= EY^2 - 2E\left(Y \cdot E(Y|X)\right) + E\left(E(Y|X)\right)^2 +$$

$$+ E\left(E(Y|X)\right)^2 - 2E\left(E(Y|X) \cdot EY\right) + (EY)^2$$

$$E\left(E(Y|X) \cdot Y\right) = E\left(E\left(E(Y|X) \cdot Y \mid X\right)\right) =$$

$$= E\left(E(Y|X) \cdot E(Y|X)\right) = E\left(E(Y|X)\right)^2.$$

$$E\left(E(Y|X) \cdot EY\right) = EY \cdot E\left(E(Y|X)\right) = (EY)^2$$

$$A = EY^2 - (EY)^2 = VY$$

**.3**

$E(X_j \mid \Sigma X_i)$ לא תלוי ב- $j$

$U$ לכל $E(U|U) = U$ , $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\sum_{i=1}^{n} E\left(X_j \mid \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \mid \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = U$$

$$= n\, E(X_j | U) = U$$

$$E(X_j | U) = \frac{1}{n} U = \bar{X}$$ לכן

**.4**

**a)**

לכל $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x}^{+\infty} \frac{2}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}(x+y)}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}} , \implies X \sim Exp\left(\frac{2}{\theta}\right)$$

**b)**

$$f_Y(y \mid X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} , \quad f_X(x) > 0$$

תרגיל 7

4).

ב. לכל $x>0$

$$f_Y(y \mid X=x) = \begin{cases} 0, & y \le x \\ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(y-x)}, & y > x \end{cases}$$

אז $Z = Y - x$

$$f_Z(z \mid X=x) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{z}{\theta}}, & z > 0 \end{cases}$$

$Z \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$

ב. הגדסית:

$$E(Y \mid X=x) = E(Z+x \mid X=x) =$$

$$= E(Z \mid X=x) + x = \theta + x .$$

$$\boxed{X \sim Exp\left(\frac{2}{\theta}\right)}$$

$$E(Y \mid X) = \theta + X$$

$$EY = E(E(Y \mid X)) = E(\theta + X) = \theta + \frac{\theta}{2} = \frac{3}{2}\theta$$

$$V(E(Y \mid X)) = V(X+\theta) = VX = \frac{\theta^2}{4}$$

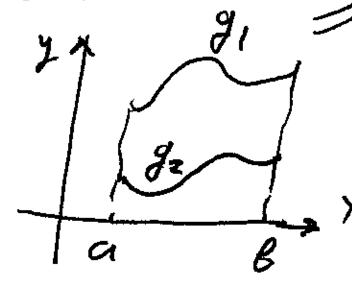
2). השטח:

$$S = S(\mathcal{E}) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\, dx$$

א)

הצפיפות המשותפת של $(X, Y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x,y) \in \mathcal{E} \\ 0, & (x,y) \notin \mathcal{E} \end{cases}$$




$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{1}{S}\, dy =$$

$$= \frac{g_2(x) - g_1(x)}{S}, \quad a \le x \le b$$

$$f_X(x) = 0, \quad x \notin [a,b]$$

$\boxed{\text{תרגיל 7}}$   2)   ב)

לכל $x\in[a,b]$,

$$f_Y(y\mid X=x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{g_2(x)-g_1(x)}, & g_1(x)\le y\le g_2(x)\\ 0, & y\notin[g_1(x),g_2(x)]\end{cases}$$

$$Y|_{X=x}\sim U\left(g_1(x),g_2(x)\right)$$

ג)

$$E(Y\mid X=x)=\frac{g_1(x)+g_2(x)}{2},\quad x\in[a,b]$$

$$E(Y\mid X)=\frac{g_1(X)+g_2(X)}{2}$$

5)   א)

$$T=X_1\cdot X_2\cdot X_3=\begin{cases}1, & X_1=X_2=X_3=1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$ET=p^3=\tau$,   ב"ת $T\sim B(1,p^3)$

ב)

$$L=p^{x_1+x_2+x_3}(1-p)^{3-x_1-x_2-x_3}=$$

$$=\underbrace{p^u(1-p)^{3-u}}_{=g(u,p)},\quad u=x_1+x_2+x_3$$

$$h(x_1,x_2,x_3)=1$$

$U=X_1+X_2+X_3$ מספיק לפי משפט הפירוק.

ג)

$$U=3\iff X_1=X_2=X_3=1\iff T=1$$

ז"א $T=I_{\{U=3\}}$ $\Rightarrow$ $T=\varphi(U)$

$\varphi(u)=I_{\{3\}}(u)$ כאשר $u=0,1,2,3$

$$E(T\mid U)=T$$

$$T^*=T$$

$f(x,p) = p^{x}(1-p)^{1-x}$   ד)   5)   $\boxed{\text{7 קביל}}$

$x = 0, 1$

$$\frac{\partial}{\partial p}\ln f = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}, \qquad \frac{\partial^2 \ln f}{\partial p^2} = -\frac{x}{p^2} - \frac{1-x}{(1-p)^2}$$

$$I(p) = E\left(\frac{X}{p^2} + \frac{1-X}{(1-p)^2}\right) = \frac{1}{p^2}\cdot p + \frac{1}{(1-p)^2}(1-p) =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}$$

$$RCB = \frac{(p^3)'}{3I(p)} \cancel{\neq} = 3p^5(1-p)$$

$$VT = p^3(1-p^3) \Leftarrow \quad T \sim B(1, p^3)$$

$$\text{eff}_T(p) = \frac{3p^5(1-p)}{p^3(1-p^3)} = \frac{3p^2}{1+p+p^2} < 1$$

יעילות של T

משום ש $0<p<1$ . T אינו יעיל

$$ET = 1\cdot P(T=1) + 0\cdot P(T=0) =$$   6.   א)

$$= P(X_1 = 0) = e^{-\lambda} = \tau \Leftarrow \quad X_1 \sim P(\lambda)$$

T ב״מ

$$L = \frac{\lambda^{x_1+\dots+x_n}}{x_1!\cdot\dots\cdot x_n!}\cdot e^{-n\lambda} =$$   ב).

$$= \underbrace{e^{-n\lambda}\cdot\lambda^{u}}_{g(u,\lambda)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x_1!\cdot\dots\cdot x_n!}}_{h(x_1\dots x_n)}$$

$U = \sum_{i=1}^{n} X_i$ סטטיסטי מספיק לפי משפט הפירוק.

תרגיל 7   .6   .ג

$$T \sim B(1, e^{-\lambda})$$

$$f_T(t \mid U=u) = \frac{P(T=t, U=u)}{P(U=u)}, \quad t=0,1 \quad u=0,1,2,\dots$$

$$E(T \mid U=u) = 1 \cdot f_T(1 \mid U=u) + 0 \cdot f_T(0 \mid U=u) =$$

$$= \frac{P(T=1, U=u)}{P(U=u)} = \frac{P(X_1=0, \sum_{i=1}^n X_i = u)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = u)} =$$

$$= \frac{P(\sum_{i=2}^n X_i = u) \cdot P(X_1=0)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = u)} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_1 \sim P(\lambda) \\ \sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda) \\ \sum_{i=2}^n X_i \sim P((n-1)\lambda) \end{array}}$$

$$= \frac{\frac{((n-1)\lambda)^u}{u!} e^{-(n-1)\lambda} \cdot e^{-\lambda}}{\frac{(n\lambda)^u}{u!} e^{-n\lambda}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^u$$

$$E(T \mid U=u) = \varphi(u) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^u$$

$$T^* = E(T \mid U) = \varphi(U) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^U$$

הערה   אם $n$ גדול

$$T^* = e^{U \ln(1-\frac{1}{n})} \approx e^{-\frac{1}{n}U} = e^{-\bar{X}}$$

$$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \approx -\frac{1}{n}}$$

$T^*$ ב"מ עבור $\tau = e^{-\lambda}$ ובעל שונות מינימלית

$e^{-\bar{X}}$ מוטה. אולם אם $n$ גדול אפשר

להשתמש גם ב- $e^{-\bar{X}}$ הוא 'עקבי'

אם $n \to \infty$   $e^{-\bar{X}} \xrightarrow{P} e^{-\lambda}$ בהסתברות