סטטיסטיקה מתמטית — תרגיל 8

1. בדוק האם משפחת ההתפלגויות הבאות היא שלמה?

a. $B(m,p)$, $0<p<1$

b. $N(0,b)$, $b>0$

c. $U(0,b)$, $b>0$

d. $U(-a,a)$, $a>0$

e. $G(p)$, $0<p<1$

f. $P(\lambda)$, $\lambda>0$

2. מצא סטטיסטי U מספיק ושלם עבור θ.
מצא אומד T מצורה $T=\varphi(U)$ כך שֶ-T הוא בע"מ בעל שונות מינימלית עבור פרמטר $\tau=\tau(\theta)$ (UMVUE).

(כרגיל: $(X_1,\dots,X_n)$ מדגם בגודל n מהתפלגות $f(x,\theta)$ תלויה בפרמטר θ, n נקבע.).

רמז: השתמש ב- $U=\sum_{i=1}^{n}K(X_i)$ אם

$$f(x,\theta)=e^{p(\theta)K(x)+S(x)+q(\theta)}$$

משפחה מעריכית רגולרית.

a. $N(\mu,1)$, $\theta=\mu$, $\tau_1=\mu$, $\tau_2=e^{-\mu}$

b. $N(0,\sigma^2)$, $\theta=\sigma$, $\tau_1=\sigma^2$, $\tau_2=\sigma$

c. $B(1,p)$, $\tau_1=\theta=p$, $\tau_2=p(1-p)$ ($n>1$), $\tau_3=p^2$ ($n>1$)

סטטיסטיקה מתמטית | תרגיל 8

2. d. $G(p)$ $\theta=p$ $\tau=\frac{1}{p}$

e. $P(\lambda)$ $\tau=\theta=\lambda$

f. $B(m,p)$, m ידוע, $\tau=\theta=p$

g. $NB(m,p)$, m ידוע, $\tau=\theta=\frac{1}{p}$

h. $U(0,\theta)$, $\theta=\theta$, $\tau=\theta^k$, $k>-n$

i. $\Gamma(\alpha,\lambda)$, α ידוע, $\theta=\lambda$, $\tau=\lambda^k$, $k>-n\alpha$

j. $Beta(a,1)$, $\theta=a$, $\tau=a^k$, $k<n$

k. $f(x,\theta)=\frac{a x^{a-1}}{\theta^a} I_{[0,\theta]}(x)$, $\theta=\theta$, $\tau=\theta^k$ $(k>-an)$

$a>0$ קבוע וידוע.

הערה אם U סטטיסטי מספיק ושלם עבור θ
ואזי $T=\varphi(U)$ ח"מ עבור $\tau=\tau(\theta)$
אזי T בעל שונות מינימלית יחידה עבור τ.
כ"א T - UMVUE

תרגיל 8   פתרון

$\underline{0<p<1}$

1). a). אם $0=\sum_{k=0}^{m}\varphi(k)\binom{m}{k}p^{k}(1-p)^{m-k}$

$t=\frac{p}{1-p}$ לכל t $\sum_{k=0}^{m}\underbrace{\varphi(k)\binom{m}{k}}_{a_k}t^{k}=0$

$0<t<+\infty$

$\Leftarrow$ לכל k $\varphi(k)=0$

$B(m,p)$ $\underline{\text{שלמה}}$

b). $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{x^2}{2b}}dx=0$

לכל פונקצ' $\varphi(x)$ אי-זוגית

$N(0,b)$ אינה שלמה

c). אם $\int_{0}^{b}\varphi(x)\frac{1}{b}dx=0$ לכל $0<b$

$\varphi(b)=\frac{d}{db}\left(\int_{0}^{b}\varphi(x)dx\right)=0$ לכל $0<b$

$\varphi=0$ $U(0,b)$ שלמה

d). $\int_{-a}^{a}\varphi(x)\frac{1}{2a}dx=0$ לכל a

ולכל φ אי-זוגית. $U(-a,a)$ לא שלמה

2). a). $f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2\mu x+\mu^2)}$

$K(x)=x$ $U=\sum_{i=1}^{n}X_i$ מספיק ושלם.

$EU=n\mu$, $T_1=\frac{U}{n}=\bar{X}$ ב"ח עבור $\tau_1=\mu$

$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$ $Ee^{-\bar{X}}=m_{\bar{X}}(-1)=e^{-\mu+\frac{1}{2n}}$

$T_2=e^{-\frac{1}{2n}}e^{-\bar{X}}$ ב"ח עבור $\tau_2=e^{-\mu}$

פתרונות

תרגיל 8

2) b)

$$f(x,\sigma) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot x^2 - \ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma)}$$

$$U=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad K(x)=x^2$$

$$EU = n\sigma^2 \,, \quad E \quad = {}^{n/2}\!/_{1/2} = n \,, \quad \frac{U}{\sigma^2}\sim\chi^2_n=\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$T_1=\frac{U}{n}=\frac{\sum_i X_i^2}{n} \qquad ET_1=\sigma^2$$

T_1 ב"מ עבור $\tau_1=\sigma^2$

$$E\sqrt{\frac{U}{\sigma^2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \sqrt{u}\, u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}\,du =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\sqrt{2}$$

$$E\sqrt{U} = \sigma\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \,, \qquad T_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

ב"מ עבור σ

הערה

$$T_2 \approx \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \Leftarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = 1$$

c)

$$f(x,p) = e^{x\ln p + (1-x)\ln(1-p)} = \qquad x=0,1$$

$$= e^{x\ln\frac{p}{1-p} + \ln(1-p)}$$

$$K(x)=x$$

$$U=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$$

$T_1=\bar{X}$ ב"מ עבור $\tau_1=p$

$$E\left(\bar{X}(1-\bar{X})\right) = \frac{1}{n}EU - \frac{1}{n^2}EU^2 =$$

$$= p - \frac{1}{n^2}\left(VU + (EU)^2\right) =$$

$$EU=np \qquad VU=np(1-p)$$

$$E\left(\bar{X}(1-\bar{X})\right) = p - \frac{1}{n^2}\left(np(1-p) + n^2p^2\right) = \frac{n-1}{n}p(1-p)$$

$T_2 = \frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X}) = \frac{U(n-U)}{n(n-1)}$ ב"מ עבור $p(1-p)$

$E(T_1 - T_2) = p - p(1-p) = p^2$, $T_3 = T_1 - T_2$

$T_3 = \frac{U}{n} - \frac{U(n-U)}{n(n-1)} = \frac{U(U-1)}{n(n-1)}$ | T_3 ב"מ עבור p^2

d). $f(x,p) = e^{\ln p + x\ln(1-p) - \ln(1-p)}$,

$x = 1, 2, 3, \ldots \qquad 0 < p < 1$

$K(x) = x \qquad U = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad T = \bar{X} = \frac{U}{n}$ ב"מ עבור $\frac{1}{p}$

e). $f(x,\lambda) = e^{x\ln\lambda - \ln x! - \lambda}$

$x = 0, 1, 2, \ldots \qquad , 0 < \lambda < +\infty$

$K(x) = x$, $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{X} = \frac{U}{n}$ ב"מ עבור λ

f). $f(x,p) = e^{\ln\binom{m}{x} + x\ln p + (m-x)\ln(1-p)}$

$= e^{x\ln\frac{p}{1-p} + \ln\binom{m}{x} + m\ln(1-p)}$

$K(x) = x \qquad U = \sum_{i=1}^{n} X_i$ מספיק ושלם עבור p.

$U \sim B(mn, p)$, $EU = mnp$

$T = \frac{U}{mn} = \frac{1}{m}\bar{X}$ אומ"ב ב"מ עבור p.

g). $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$ מספיק ושלם עבור p

$U \sim NB(mn, p)$, $EU = \frac{mn}{p}$

$T = \frac{U}{mn} = \frac{1}{m}\bar{X}$ אומ"ב ב"מ עבור $\frac{1}{p}$.

2).　ה).

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}I_{[0,\theta]}(x)\qquad \theta>0$$

$$L=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}I_{[0,\theta]}(x_i)=\underbrace{\frac{1}{\theta^n}I_{[0,\theta]}(\tilde{x})}_{g(\theta,\tilde{x})},\quad \tilde{x}=\max_{1\le i\le n}x_i$$

$$h(x_1\dots x_n)=1,$$

$U=\tilde{X}=\max_{1\le i\le n}X_i$ מספיק עבור θ.

$$f_{\tilde{X}}(u,\theta)=\frac{1}{\theta^n}nu^{n-1}I_{[0,\theta]}(u)$$

אם $0=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)f_{\tilde{X}}(u,\theta)\,du$ לכל $0<\theta$

אז $0=\int_0^{\theta}\varphi(u)u^{n-1}d$ לכל $0<\theta$

$\Leftarrow$ $\varphi(\theta)\theta^{n-1}=0$ לכל $0<\theta$ $\Leftarrow$ $\varphi=0$

U שלם עבור θ.

$$E\tilde{X}^k=\int_0^{\theta}u^k\frac{nu^{n-1}}{\theta^n}du=\frac{n}{n+k}\theta^k.$$ לכל $k>-n$

$T=\frac{n+k}{n}\tilde{X}^k$ אומד ח"ה עבור $\tau=\theta^k$

<u>למשל</u> $\tau=\theta$, $T=\frac{n+1}{n}\tilde{X}$, $\tau=\theta^2$ $T=\frac{n+2}{n}\tilde{X}^2$

$\tau=\sqrt{\theta}$ $T=\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\sqrt{\tilde{X}}$, $\tau=\frac{1}{\theta}$ $T=\frac{n-1}{n}\frac{1}{\tilde{X}}$

ו).

$$f(x,\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$$

$0<\lambda<+\infty$

$0<x<+\infty$　　$\alpha>0$ קבוע ידוע

$$f(x,\lambda)=e^{-\lambda x+(\alpha-1)\ln x+\alpha\ln\lambda-\ln\Gamma(\alpha)}$$

$K(x)=x$

$U=\sum_{i=1}^{n}X_i$ מספיק ושלם עבור λ

$$U\sim\Gamma(n\alpha,\lambda)$$

$$f_U(u,\lambda)=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}u^{n\alpha-1}e^{-\lambda u}\cdot I_{[0,+\infty)}(u)$$

$$EU^{-k}=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\cdot\int_0^\infty u^{n\alpha-1-k}e^{-\lambda u}\,du=$$

$$=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(n\alpha-k)}{\lambda^{n\alpha-k}}=\frac{\Gamma(n\alpha-k)}{\Gamma(n\alpha)}\lambda^k,\qquad \underline{k<n\alpha}$$

$T=\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha-k)}\cdot\frac{1}{U^k}$ אומד ב"מ עבור $\tau=\lambda^k$
(UMVUE)

<u>לדוגמה</u> $\Gamma(1,\lambda)=Exp\,\lambda,\ \alpha=1$

$k=1$ $\quad T=\frac{n-1}{\sum_i X_i}$ ב"מ עבור λ

$k=-1$ $\quad T=\frac{U}{n}=\bar{X}$ ב"מ עבור $\frac{1}{\lambda}$

$\bar{X}$ זה יעיל עבור $\frac{1}{\lambda}$ במקרה הזה.

d.)

$$f(x,a)=ax^{a-1}I_{[0,1]}(x)=e^{(a-1)\ln x+\ln a}$$

$K(x)=-\ln x$

$U=-\sum_{i=1}^n\ln X_i$ מספיק ושלם עבור a

$-\ln X_i\sim Exp(a)\quad,\quad U\sim\Gamma(n,a)$

$$EU^{-k}=\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(n)}a^k,\qquad k<n$$

$T=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-k)}\cdot\frac{1}{U^k}$ ב"מ עבור a^k $\quad k<n$

<u>לדוגמה</u>

$T=\frac{n-1}{-\sum\ln X_i}$ ב"מ עבור a

$T=-\frac{1}{n}\sum_i\ln X_i$ ב"מ עבור $\frac{1}{a}$
(וגם זה יעיל)

תרגיל 8 | פתרון

2). 3).

$$f(x,\theta)=\frac{a x^{a-1}}{\theta^a} I_{[0,\theta]}(x)$$

$$L=\left(\frac{a}{\theta^a}\right)^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{a-1} I_{[0,\theta]}(\tilde{x}) \quad , \quad \tilde{x}=\max_{1\le i\le n} x_i$$

$$h(x_1 \ldots x_n)=\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{a-1} \quad , \quad g(\tilde{x},\theta)=\left(\frac{a}{\theta^a}\right)^n I_{[0,\theta]}(\tilde{x})$$

$U=\tilde{X}=\max_{1\le i\le n} X_i$ מספיק עבור θ.

$$F_{\tilde{X}}(u)=\left(\frac{u^a}{\theta^a}\right)^n I_{[0,\theta]}(u) \quad , \quad 0\le u\le \theta$$

$$F_{\tilde{X}}(u)=0 \ , \ u<0 \ , \quad F_{\tilde{X}}(u)=1 \ , \ u>\theta$$

$$f_{\tilde{X}}(u,\theta)=\frac{an}{\theta^{an}} u^{an-1} I_{[0,\theta]}(u)$$

$$\int_0^\theta \varphi(u)\frac{an}{\theta^{an}} u^{an-1} du=0 \implies \varphi=0$$

$U=\tilde{X}$ מספיק ושלם עבור θ.

$$E\tilde{X}^k=\frac{an}{\theta^{an}}\int_0^\theta u^k u^{an}\, du=$$

$$=\frac{an}{\theta^{an}}\cdot\frac{\theta^{an+k}}{an+k}=\frac{an}{an+k}\theta^k$$

$T=\dfrac{an+k}{an}\tilde{X}^k$ אומ"ג עבור $\tau=\theta^k$

$k>-an$

<u>בפרט</u> אם $a=2$, $f_X(x,\theta)=\dfrac{2x}{\theta^2} I_{[0,\theta]}(x)$

$k=1$ $\quad T=\dfrac{2n+1}{2n}\tilde{X}$ ב"ת עבור θ

$k=-1$ $\quad T=\dfrac{2n-1}{2n}\dfrac{1}{\tilde{X}}$ ג"מ עבור $\dfrac{1}{\theta}$