סטטיסטיקה מתמטית

תרגיל 9

1. נלקח מדגם $(X_1,...,X_n)$ מהתפלגות אחידה רציפה $U(0,\theta)$, $0<\theta$.
$\tilde{X}_n=\max(X_1,...,X_n)$ אומד עבור θ.

a. בדוק ש- $\tilde{X}_n$ אומד עקבי עבור θ, $\tilde{X}_n \xrightarrow{P} \theta$
בדוק ש- $\frac{1}{\theta}\tilde{X}_n$ גודל ציר, $\frac{1}{\theta}\tilde{X}_n \sim Beta(n,1)$

b. מצאו רמת הבטחון של רווח סמך מצורה $\left(\frac{1}{b}\tilde{X}_n, \frac{1}{a}\tilde{X}_n\right)$ כאשר $0\le a<b\le 1$.

c. $0<\alpha<1$. האם קיים רווח סמך עבור θ מהצורה בר"ב $1-\alpha$?

d. בקר כל רווחי סמך $\left(\frac{1}{b}\tilde{X}_n, \frac{1}{a}\tilde{X}\right)$ בעלי ר"ב $1-\alpha$ מצאו רווח סמך הקצר ביותר.

e. תאר את הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שעבורם רמת הבטחון של רווח סמך $\left(\tilde{X}, \frac{1}{a_n}\tilde{X}\right)$ שואפת ל- 1, $n\to\infty$ ואורך של רווח הסמך שואף ל- 0, $n\to\infty$.
בנה דוגמאות.

2. נלקח מדגם $(X_1,...,X_n)$ מהתפלגות $f(x,\theta)$.
בנה רווח סמך עבור פרמטר $\tau=\tau(\theta)$ מבוסס על סטטיסטי $U=u(X_1,...,X_n)$ ברמת הבטחון $1-\alpha$ כאשר ההתפלגות היא:

a. $U(-a,a)$, $\tau=\theta=a$, $U=\max_{1\le i\le n}|X_i|$

b. $N(\mu,1)$, $\tau=\theta=\mu$, $U=\bar{X}$

c. $N(0,\sigma^2)$, $\theta=\sigma$, $\tau_1=\sigma^2$, $\tau_2=\sigma$, $U=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

תרגיל 6

2). d). $Exp(\lambda)$, $\tau_1=\lambda$, $\tau_2=\frac{1}{\lambda}$, $U=\bar{X}$

e). $Beta(a,1)$, $\tau_1=a$, $\tau_2=\frac{1}{a}$, $U=-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

f). $f(x,a)=\frac{a}{x^{a+1}}I_{[1,+\infty)}$, $a>0$

$\tau=a$, $U=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

g). $f(x,\theta)=e^{\theta-x}\cdot I_{[\theta,+\infty)}$, $\tau=\theta$, $U=\underset{\sim}{X}=\min_{1\le i\le n}X_i$

3). נלקח מדגם $(X_1,\dots,X_n)$ מהתפלגות $f(x,\theta)$.
בנה כמות בר סמך עבור פרמטר $\tau=\tau(\theta)$
מבוסס על $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ אם ידוע ש- n <u>גדול</u>
כך שאפשר להשתמש בקירוב נורמלי.
התפלגות $f(x,\theta)$ היא:

a). $Exp(\lambda)$, $\tau=\frac{1}{\lambda}$, $\tau=\lambda$, $\tau=\frac{1}{\lambda^2}$

b). $B(1,p)$, $\tau=p$

c). $P(\lambda)$, $\tau=\lambda$, $\tau=\frac{1}{\lambda}$, $\tau=e^{-\lambda}$

d). $B(m,p)$, m ידוע , $\tau=p$

e). $G(p)$, $\tau=p$, $\tau=\frac{1}{p}$

f). $\Gamma(m,\lambda)$, m ידוע $\tau=\frac{1}{\lambda}$, $\tau=\lambda$

g). $U(0,b)$, $\tau=b$, $\tau=\frac{1}{b}$

תרגיל 6 — פתרונות

(1. (a.

$$F_{\tilde{X}_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{t^n}{\theta^n}, & 0 \le t \le \theta \\ 1, & t \ge \theta \end{cases}$$

לכל $\varepsilon > 0$

$$P(|\tilde{X}_n - \theta| < \varepsilon) = P(\tilde{X}_n > \theta - \varepsilon) =$$

$$= 1 - F_{\tilde{X}_n}(\theta - \varepsilon) = 1 - \frac{(\theta-\varepsilon)^n}{\theta^n} \longrightarrow 1, \quad n \to \infty$$

אם $Q = \frac{1}{\theta}\tilde{X}_n$, $\quad F_Q(u) = P(\tilde{X}_n \le \theta u) = F_{\tilde{X}_n}(\theta u)$

$$F_Q(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u^n, & 0 \le u < 1 \\ 1, & u \ge 1 \end{cases} \qquad Q \sim Beta(n, 1)$$

גודל צירי

(b. $P\left(\frac{\tilde{X}_n}{b} < \theta < \frac{\tilde{X}_n}{a}\right) = P(a < Q < b) = \underbrace{b^n - a^n}_{\text{ר"ב}}$

(c. $b^n - a^n = 1 - \alpha$, $\quad 0 \le a = \sqrt[n]{b^n - (1-\alpha)}$, $\quad b \ge \sqrt[n]{1-\alpha}$

לכל $b \ge \sqrt[n]{1-\alpha}$ רווח סמך $\left(\frac{1}{b}\tilde{X}_n, \frac{1}{\sqrt[n]{b^n - (1-\alpha)}}\tilde{X}_n\right)$ בעל ר"ב $1-\alpha$.

(d. פונקציה של b:

$$\psi(b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt[n]{b^n - (1-\alpha)}} = \frac{1 - \sqrt[n]{1 - \frac{1-\alpha}{b^n}}}{\sqrt[n]{1 - \frac{1-\alpha}{b^n}}}$$

יורדת, $b \le 1$,

$$\min_b \psi(b) = \psi(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}, \quad \text{עבור } b = 1$$

$\left(\tilde{X}_n, \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\tilde{X}_n\right)$ הכי קצר עם ר"ב $1-\alpha$

(e. $\left(\tilde{X}_n, \frac{1}{a_n}\tilde{X}\right)$ בעל ר"ב $1-(a_n)^n$ ואורכו $\tilde{X}\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)$

$0 \leftarrow (a_n)^n \Longrightarrow 1 - (a_n)^n \to 1, \quad \Big| \quad a_n \to 1 \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{a_n} \to 0$

$\Longleftrightarrow n \ln a_n \to -\infty$

$\Longleftrightarrow n(1 - a_n) \to +\infty$

$$\boxed{\begin{matrix} a_n \to 1 \\ n(1-a_n) \to \infty \end{matrix}}$$

לדוגמא

$$a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

תרגיל 6 פתרון

.(2 .(a $X_i \sim U(-a,a) \Longrightarrow |X_i| \sim U(0,a)$

$$U = \frac{1}{a}\max_{1\le i\le n}|X_i| \sim Beta(n,1)$$ [illegible]

$$P\left(U < a < \frac{1}{c}U\right) = P\left(\frac{U}{a} > c\right) = 1 - c^n = 1-\alpha$$

$$c = \sqrt[n]{\alpha}$$

$$P\left(U < a < \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}U\right) = 1-\alpha$$

.(b
$$P\left(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right.$$

.(c
$$X_i \sim N(0,\sigma^2) \Longrightarrow \frac{1}{\sigma^2}U = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$P\left(\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 < \chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}} < \sigma < \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}}\right) = 1-\alpha$$

.(d
$$X_i \sim Exp(\lambda) \Longrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n,\lambda) \Longrightarrow 2n\lambda\bar{X} \sim \chi^2_{2n}$$

$$P\left(\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}} < 2n\lambda\bar{X} < \chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{2n\bar{X}} < \lambda < \frac{\chi^2_{2n,}}{2n\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

תרגיל 6

פתרונות

$$P\left(\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}\right)=1-\alpha$$

.(e

$$2aU\sim\chi^2_{2n} \qquad U=-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\sim\Gamma(n,a)$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{-2\sum_i \ln X_i} < a < \frac{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sum_i \ln X_i}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{-2\sum_i \ln X_i}{\chi_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{1}{a} < \frac{-2\sum_i \ln X_i}{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}\right)=1-\alpha$$

.(f

$$F_{X_i}(x)=(1-x^{-a})\cdot I_{[1,+\infty)}$$

$$P(\ln X\le t)=P(X_i\le e^t)=1-e^{-at}, \quad t>0$$

$$U=\sum_i \ln X_i\sim\Gamma(n,a), \quad \ln X\sim Exp(a)$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{2n,\alpha/2}}{2U} < a < \frac{\chi^2_{2n,1-\alpha/2}}{2U}\right)=1-\alpha, \quad 2aU\sim\chi^2_{2n}$$

$$P\left(\frac{2U}{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{1}{a} < \frac{2U}{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}\right)=1-\alpha$$

.(g

$$F_{X_i}(x)=(1-e^{\theta-x})\cdot I_{[\theta,+\infty)}$$

$$P(\min_i X_i\le t)=1-P(\min_i X_i>t)=$$

⑥ פתרונות | תרגיל 6

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = 1 - e^{n(\theta - t)}, \quad t \geq \theta$$

$$P(\underset{\sim}{X} - \theta \leq t) = 1 - e^{-nt}, \quad t \geq 0$$

$$\underset{\sim}{X} - \theta \sim Exp(n)$$

$$P(\underset{\sim}{X} - c \leq \theta \leq \underset{\sim}{X}) = P(\underset{\sim}{X} - \theta \leq c) = 1 - e^{-cn} = 1 - \alpha$$

$$\alpha = e^{-cn}, \quad c = -\frac{1}{n}\ln\alpha$$

$$P\left(\underset{\sim}{X} + \frac{1}{n}\ln\alpha < \theta < \underset{\sim}{X}\right) = 1 - \alpha$$

.(3   .(a $Exp(\lambda)$, $E\bar{X} = \frac{1}{\lambda}$ $V\bar{X} = \frac{1}{n\lambda^2}$

$$Z_n = \sqrt{n}(\lambda\bar{X} - 1), \quad Z_n = \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0,1)$$

אם n גדול

$$1 - \alpha = P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_n < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}(\lambda\bar{X} - 1) < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\bar{X}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) < \lambda < \frac{1}{\bar{X}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right) \approx 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1} < \frac{1}{\lambda} < \bar{X}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1}\right) \approx 1 - \alpha$$

.(ß $B(1, p)$ $\hat{p} = \bar{X}$

$$P\left(\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < p < \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1 - \alpha$$

תרגיל 6 פתרונות

3. c. $P(\lambda)$, $E\bar{X}=\lambda$, $V\bar{X}=\lambda$

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \lambda \ , \quad \sqrt{\bar{X}} \xrightarrow{P} \sqrt{\lambda} \ , \quad Z_n = \frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0,1)$$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \lambda < \bar{X}+\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

$$P\left(\left(\bar{X}+\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1} < \frac{1}{\lambda} < \left(\bar{X}-\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1}\right) \approx 1-\alpha$$

$$P\left(e^{-\left(\bar{X}+\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)} < e^{-\lambda} < e^{-\left(\bar{X}-\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}\right) \approx 1-\alpha$$

d. $B(m,p)$, $E\bar{X}=mp$, $V\bar{X}=\frac{mp(1-p)}{n}$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-mp}{\sqrt{\frac{mp(1-p)}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-p$$

$$p \approx \frac{1}{m}\bar{X} \ , \quad \hat{p} = \frac{1}{m}\bar{X} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , \quad p(1-p) \approx \hat{p}(1-\hat{p})$$

$$P\left(\hat{p}-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{mn}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} < p < \hat{p}+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{mn}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

---

e. $G(p)$ $E\bar{X}=\frac{1}{p}$ $V\bar{X}=\frac{1-p}{np^2}$

$$Z_n = \frac{\bar{X}-\frac{1}{p}}{\sqrt{\frac{1-p}{np^2}}} = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}p-1)}{\sqrt{1-p}} \longrightarrow Z \sim N(0,1)$$

אומד עקבי עבורם $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$

פתרונות

תרג'ל 6

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}\cdot p-1)}{\sqrt{1-p}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

$$\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}}$$

$$P\left(\hat{p}\left(1-\sqrt{\frac{1-\hat{p}}{n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) < p < \hat{p}\left(1+\sqrt{\frac{1-\hat{p}}{n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right) \approx 1-\alpha$$

f. $\Gamma(m,\lambda)$, $E\bar{X}=\frac{m}{\lambda}$ $\quad V\bar{X}=\frac{m}{n\lambda^2}$

$$z_n=\frac{\bar{X}-\frac{m}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{m}{n}}}=\frac{\lambda\bar{X}-m}{\sqrt{\frac{m}{n}}} \xrightarrow{D} Z\sim N(0,1)$$

$$P\left(\frac{1}{\bar{X}}\left(m-\sqrt{\frac{m}{n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) < \lambda < \frac{1}{\bar{X}}\left(m+\sqrt{\frac{m}{n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right) \approx 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}\left(m+\sqrt{\frac{m}{n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1} < \frac{1}{\lambda} < \bar{X}\left(m-\sqrt{\frac{m}{n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1}\right) \approx 1-\alpha$$

g. $U(0,b)$ $\quad E\bar{X}=\frac{b}{2}$ $\quad V\bar{X}=\frac{b^2}{12n}$

$$z_n=\frac{\bar{X}-\frac{b}{2}}{b}\cdot 2\sqrt{3n}=\frac{2\bar{X}-b}{b}\sqrt{3n} \xrightarrow{D} Z\sim N(0,1)$$

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{2\bar{X}}{b}-1 < \frac{1}{\sqrt{3n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{2\bar{X}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) < \frac{1}{b} < \frac{1}{2\bar{X}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right) \approx 1-\alpha$$

$$P\left(2\bar{X}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1} < b < 2\bar{X}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3n}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1}\right) \approx 1-\alpha$$