סקיצה של פתרונות - תרגיל 3.

(41)

(b) $r=a\cup bb^*a$

(e) $r=(ab\cup ba)^*$

(g) $r=\left(\left(a(ba)^*\cup b(ab)^*a\right)aa^*b\cup\left(a(ba)^*b\cup b(ab)^*\right)bb^*a\right)(a\cup b)^*$

יש מס' אפשרויות נוספות לתשובה.

<u>הערה</u> (כללית):

אין כאן פתרונות לכל התרגילים.

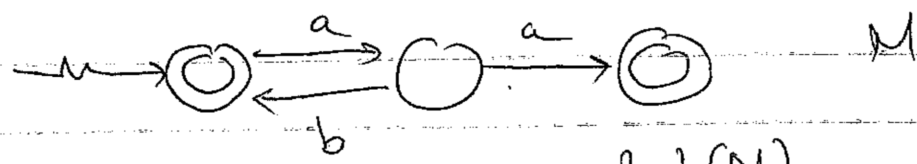
חלק מהפתרונות חלקיים.

יש כאן <u>הצעה</u> לפתרון, יש בוודאי דרכים שונות לפתור כל בעיה.

* כולל תיקונים: 48.c

45.d

(43) (b)



מהי $L(M)$?

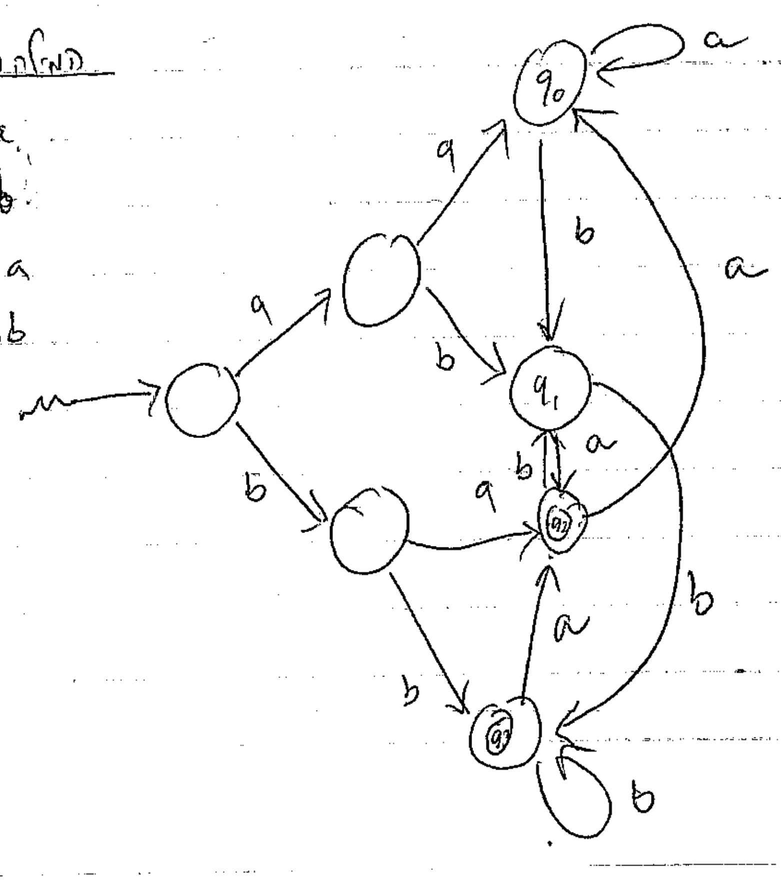
נמצא ביטוי רגולרי: $r=(ab)^* \cup (ab)^*aa$

בקיצור $r=(ab)^*(\varepsilon \cup aa)$

$L(M)=\{$ כל המילים מעל $\{a,b\}$ שאורכן זוגי
וכן כל האותיות במקום זוגי במילה $0,2,\ldots$
שוות ל- a וכן כל האותיות במקום האי-
זוגי $1,3,\ldots$ שוות ל b (מלבד האחרונה
שיכולה להיות שווה גם ל a). $\}$

(42) (ח) $L=$ מילים שבהן האות השלישית מימין היא b :
לשם פשטות
נפתור משהו דומה:
האות השנייה
מימין היא b.

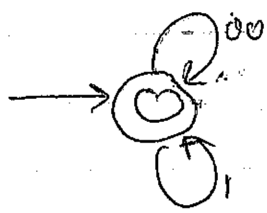
מצב	המילה מסתיימת
q_0	aa
q_1	ab
q_2	ba
q_3	bb



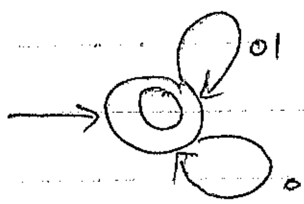
(45) (d) בנה NFA המתאים לביטוי $(00 \cup 1)^* \cup (01 \cup 0)^*$

בניה בשלבים!

1) אוטומט לביטוי $(00 \cup 1)^*$

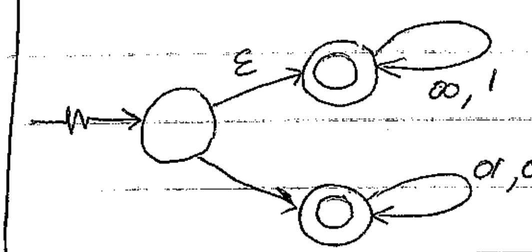


2) אוטומט לביטוי $(01 \cup 0)^*$

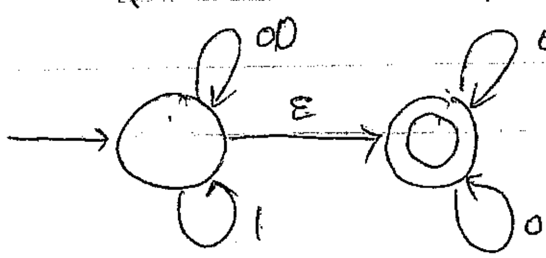


3) האוטומט

האוטומט לאיחוד:



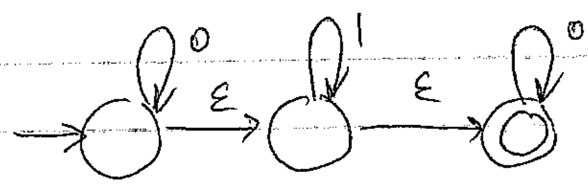
(אוטומט לשרשור)



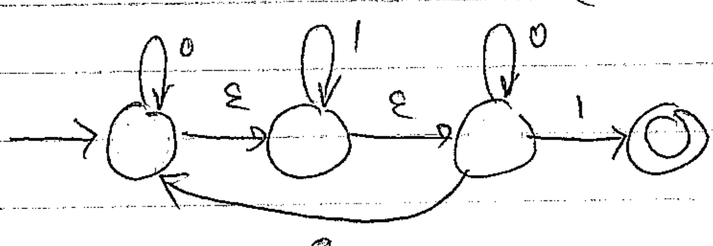
(e) בנה אוטומט NFA לביטוי $((0^*1^*0^*)^*1)^*$

בניה בשלבים:

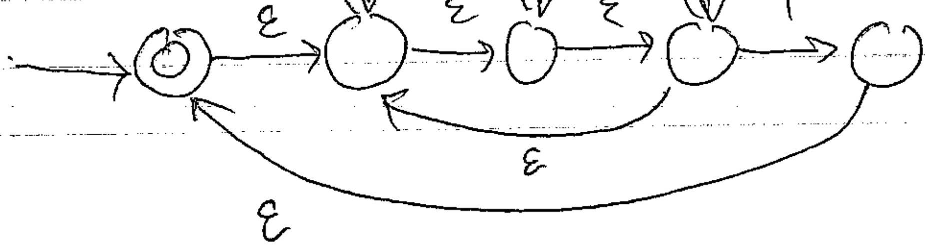
1) לביטוי $0^*1^*0^*$



2) לביטוי $(0^*1^*0^*)^*1$



3) $((0^*1^*0^*)^*1)^*$



45 e

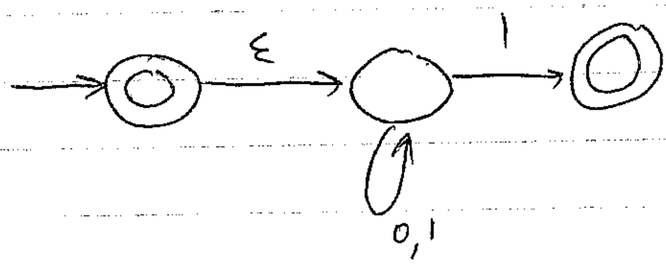
המשך.

דרך נוספת לפתרון:

אפשר להוכיח e $L((0^*1^*0^*)^*1)^* = L((0\cup1)^*1)^*$

כלומר, השפה כי שפת כל המילים שנגמרות
ב '1', או שהמילה ריקה.

אוטומט NFA לשפה זו הוא:



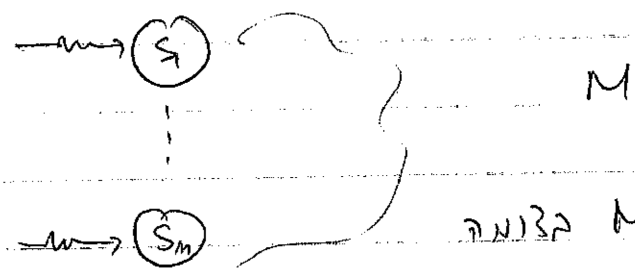
(46) **טענה** משפחת האוטומטים שבהם יש רק בדיוק מצב אחד התחלתי שקולה למשפחת האוטומטים שבהם יש לפחות מצב התחלתי אחד.

הוכחה

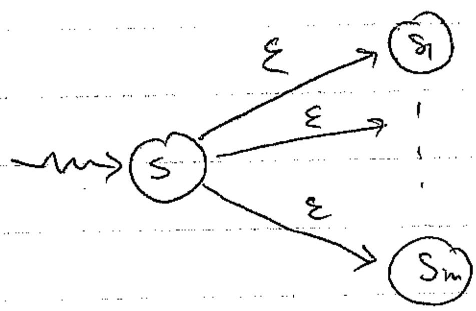
⇐ אם ב M יש רק מצב תחילי אחד, אז בפרט יש בו לפחות מצב תחילי אחד.

⇒ נקח M שבו יש מספר מצבים תחיליים, $s_1, s_2, \ldots, s_m$ נבנה מ M אוטומט שקול M' שבו יש רק מצב תחילי ותיד $L(M') = L(M)$.

הסבר בציור:



בונים את M' בצורה ל M ומוסיפים לו מצב התחלתי חדש s, מוסיפים מעבר ε מ s לכל s_i, $1 \le i \le m$, s לא מקבל.
כל שאר המעברים אותו הדבר.
כל שאר המצבים כמו M.



$L(M') = L(M)$ (ללא הוכחה כאן)

ו M' הוא אוטומט (NFA) שיש בו בדיוק מצב אחד תחילי.

(47) (a)

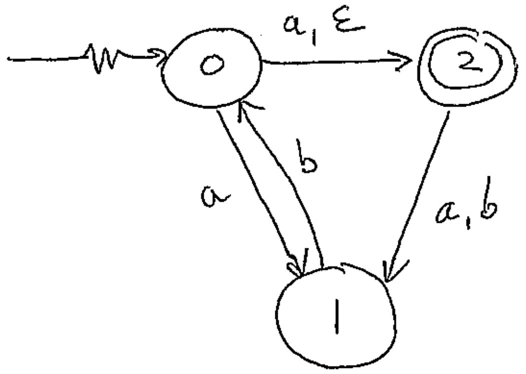
לכל שפה רגולרית שמקיימת $\varepsilon \notin L$ ובכל DFA M כך ש $L = L(M)$ המצב ההתחלתי של M, s, אינו שייך ל A.

$s \notin A$

לכן בצמצום השפות לשפות עבורן $A = \{s\}$ לא כולל את L.

48 ©

מצא DFA שקול ל NFA הבא:



$E(\{0\}) = \{0,2\}$

$\delta(\{0\}, a) = E(\{1,2\}) = \{1,2\}$

$\delta(\{0\}, b) = E(\phi) = \phi$

$\delta(\{1\}, a) = E(\phi) = \phi$

$\delta(\{1\}, b) = E(\{0\}) = \{0,2\}$

$\delta(\{2\}, a) = E(\{1\}) = \{1\}$

$\delta(\{2\}, b) = E(\{1\}) = \{1\}$

$\delta(\{0,2\}, a) = \{1,2\}$

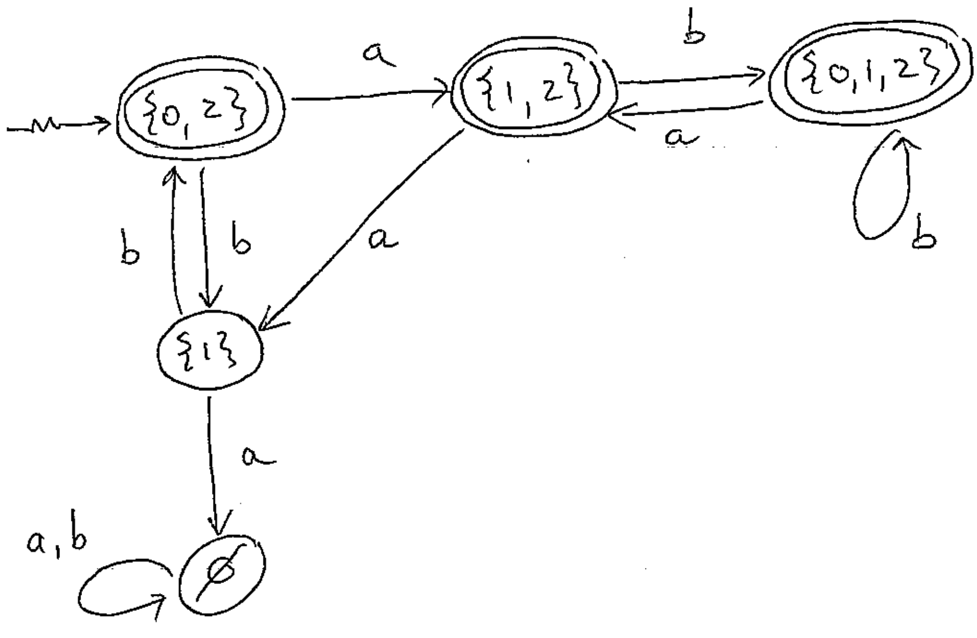
$\delta(\{0,2\}, b) = \{1\}$

$\delta(\{1,2\}, a) = \{1\}$

$\delta(\{1,2\}, b) = \{0,1,2\}$

$\delta(\{0,1,2\}, a) = \{1,2\}$

$\delta(\{0,1,2\}, b) = \{0,1,2\}$



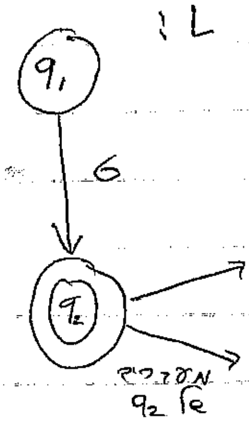
(49) (ג) $L' = \{\omega_1\sigma^2 \mid \omega_1\sigma \in L \;\; \omega_1 \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma\}$ L מתקבלת ע"י FA

נראה ש L' מתקבלת ע"י FA.

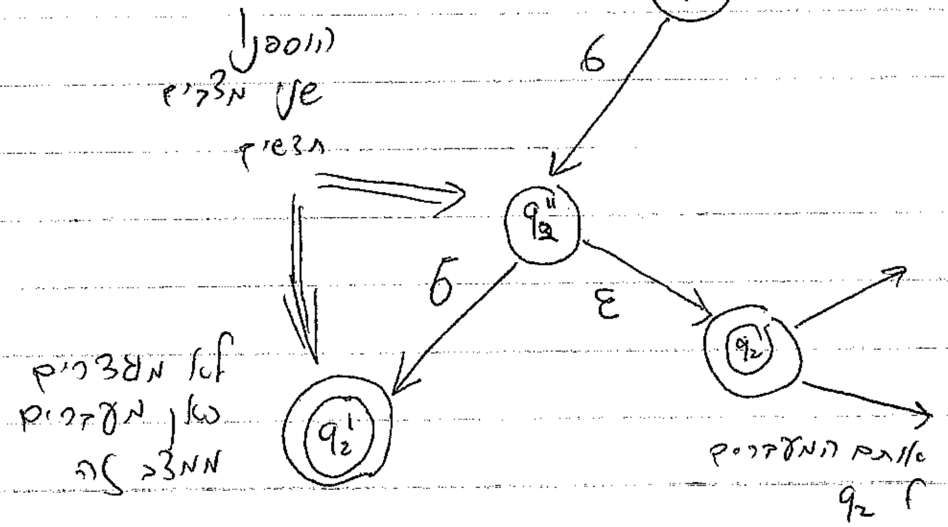
נניח ש M הוא DFA של L:

נסתכל על הסיטואציה הבאה ב M:

נניח שקראנו מילה x שנגמרה ב σ והגענו למצב מקבל.



נשנה כזאת ל:



<u>הסבר:</u>

אם המילה x נקראת ב M ומסתיימת בתו σ שבו את הקריאה במצב מקבל כשהו q_2, אז באוטומט החדש נאפשר ל M' לקרוא עוד תו σ כזה במקרה של סוף מילה, ולכן מ q_2' אין מעברים מוגדרים. וכדי שנאפשר להמשך המילה להיקרא ממצב q_2, ע"י כך שהוספנו מעבר ε מ q_2'' ל q_2.

q_2'' מצב ביניים שמאפשר לבחור אם הגענו לסוף מילה או שממשיכים בקריאה.

באופן יותר פורמלי, נגדיר את M':

$M'=(Q',\Sigma,\Delta',s',A')$

$Q'=\{q \mid q\in Q\setminus A\}\cup$ $\quad s'=s$

$\{q,q',q'' \mid q\in A\}$ על כל מצב מקבל הוספנו 2 מצבים!

$A'=\{q'_a,q_a \mid q\in A, a\in\Sigma\}$ כמו בציור, פי שניים יותר מצבים מקבלים

<u>תאור Δ'</u>: (אנו מניחים ש $x\in\Sigma$ לאורך הבנייה)

- אם $\delta_M(p,x)=q$ וגם $q\notin A$

אז יש מעבר ב M' $(p,x,q)\in\Delta'$

(אלו מעברים שלא שונו)

- אם $\delta_M(p,x)=q$ וגם $q\in A$

אז נוספו המעברים הבאים ל M':

(*) $(p,x,q''_x)\in\Delta'$

(**) $(q''_x,x,q'_x)\in\Delta'$

(***) $(q''_x,\varepsilon,q'_x)\in\Delta'$

חשוב להבהיר שלכל q''_x כזה, יש בדיוק חץ אחד שנכנס אליו (*) ובדיוק שני חיצים שיוצאים ממנו (**) / (***).

<u>טענה</u>: $L'=L(M')$

$\Leftarrow$ אם $x\in L'$ אז לפי הגדרת L' קיים w_1 ו σ כך ש $w_1\sigma^2=x$ ו $w_1\sigma\in L$ ו $\sigma\in\Sigma$.

אז יש מסלול כזה ב M: $\delta^*(s,w_1\sigma)=q_a\in A$

$(s,w_1\sigma)\vdash^*_M(q_a,\varepsilon)$

$(s,w_1\sigma)\vdash^*_M(q,\sigma)\vdash_M(q_a,\varepsilon)$.

ולכן ב M' יש מעברים הבאים:

$(q,\sigma,q''_\sigma)\in\Delta'$

$(q''_\sigma,\sigma,q_a)\in\Delta'$ וגם $A'\ni q_a=q'_\sigma$

כמו כן,
עבור מצבים מקבלים/לא מקבלים שנמצאים
בתוך המסלול של המילה $w_1\sigma$ ב M
ניתן לבצע את הקריאה של אותם
תווים ולהגיע למצב השקול ב M'.
ולכן, $(q_0, w_1\sigma\sigma) \vdash^*_{M'} (q, \sigma\sigma) \vdash_{M'} (q''_\sigma, \sigma) \vdash_{M'} (q_\sigma, \varepsilon)$
כלומר $w_1\sigma^2 \in L(M')$.
$\Rightarrow$ לכל מילה $x \notin L'$, אז או ש $x = w_1\sigma^2$
$w_1\sigma \in L$ או ש $x = w_1\sigma\sigma'$; $w_1\sigma \in L$, $\sigma' \neq \sigma$.
בשני המקרים קל לראות ש $x \notin L(M')$.
(נשאר ללא הוכחה).

(52)

h הומומורפיזם $h:\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2^*$

כלומר, $h(\varepsilon)=\varepsilon$; $h(w\sigma)=h(w)h(\sigma)$

(a) אם $L\subseteq\Sigma_1^*$ מתקבלת ע"י FA

אז $h(L)=\{h(w) \mid w\in L\}\subseteq\Sigma_2^*$

$h(L)$ גם מתקבלת ע"י FA.

<u>הוכחה</u>

יהי M FA שמקבל את $L\subseteq\Sigma^*$, [נניח בה"כ שהמעברים בסמלים בודדים ולא במילים]

(נניח בה"כ ש M הוא DFA) $M=(Q,\Sigma,\delta,s,A)$

נבנה אוטומט M' שמקבל את $h(L)$:

$M'=(Q',\Sigma',\delta',s',A')$

$Q'=Q$

$\Sigma'=\Sigma_2$ (מפני ש $h(L)\subseteq\Sigma_2^*$)

תאור של δ':

- לכל $\delta(q,w_1,p)$ כך ש $w_1\in\Sigma_1$; $q,p\in Q$
יוגדר $\delta'(q,h(w_1),p)$ באוטומט M' ;

$A'=A$; $s'=s$

<u>טענה:</u> $L(M')=h(L)$

$\Leftarrow$ נקח $x\in h(L)\subseteq\Sigma_2^*$ כלומר קיים $y\in\Sigma_1^*$ כך ש $h(y)=x$

נניח שבה"כ y באורך n $y=y_0y_1\dots y_{n-1}$

$y_i\in\Sigma_1$ כמו כן ידועים לנו מכוון ש $x\in h(L)$

ו $h(y)=x\in h(L)$ אז $y\in L$

כלומר $\delta^*(q_0,y)=q_A\in A$.

מהטענה של δ^* זה אומר שיש סדרה סופית של קונפיגורציות: (שמתארת ריצה של M).

$(q_0,y_0y_1\dots y_{n-1})\vdash_M(q_1,y_1y_2\dots y_{n-1})\vdash_M(q_2,y_2\dots y_{n-1})\vdash_M\dots\vdash_M(q_n,\varepsilon)$

כאשר $q_A=q_n$

אז לכל מעבר $(q_i,y_i\dots y_{n-1})\vdash_M(q_{i+1},y_{i+1}\dots y_{n-1})$ ב- M

יש מעבר $(q_i, \overbrace{h(y_i)\ldots h(y_{n-1})}^{h(y_i\ldots y_{n-1})}) \vdash_{M'} (q_{i+1}, h(y_{i+1})\ldots h(y_{n-1}))$ ב M'
(לפי ההגדרה של δ').

כמו כן, לפי תכונה של הומומורפיזם מתקיים

$$h(y) = h(y_0\ldots y_{n-1}) = h(y_0)\ldots h(y_{n-1})$$

לכן הסדרה הבאה מראה ש $h(y)$ מתקבלת ע"י M':

$$(q_0, h(y_0)h(y_1)\ldots h(y_{n-1})) \vdash_{M'} (q_1, h(y_1)h(y_2)\ldots h(y_{n-1})) \vdash_{M'} \ldots \vdash_{M'} (q_{n-1}, h(y_{n-1})) \vdash (q_n, \varepsilon).$$

$q_n = q_n \in A'$.

כיוון זה הוכח דו-כיווני! (תפס גם בכוון שני).

(53) $L \subseteq \{a\}^*$ $P(L) = \{n \mid a^n \in L\}$ קבוצת האורכים של מילים ב-L

(הרעיון של תשובה זו לקוח מהרצאה ב"תורת האוטומטים" של פרופ. אורי אברהם)

L מתקבלת ע"י אוטומט סופי אמ"מ P(L) "סדרתי בסופו של דבר"

(eventually periodic) כלומר:

קיים $0 \le n_0$ ו- $0 < d$ ו- d_i; $0 \le d_1 < d_2 < \dots < d_k < d$

כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

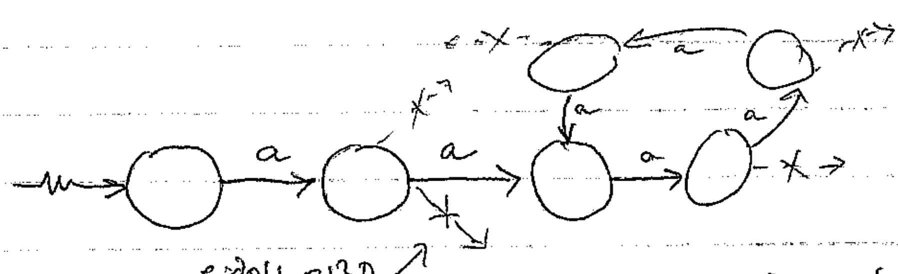
$n \in P(L) \iff n \pmod d = d_i$, $0 \le i \le k$

<u>תשובה</u> תנאי זה של "סדרתי בסופו של דבר"

משמעו שאורכי המילים ב-L מהוות איחוד סופי של סדרות חשבוניות בעלות הפרש זהה, שהוא d.

נראה תכונה זו:

אם L מתקבלת ע"י האוטומט M אז נניח (בה"כ) ש-M דטרמיניסטי. מכיוון ש-M דטרמיניסטי יש אז בדיוק מעבר אחד מכל מצב עם כל תו ב-Σ. אם מכיוון שב-Σ יש רק תו בודד (שהוא a) אז מכל מצב יוצא רק חץ אחד באוטומט. מסיבה זו יתכן לכל היותר לולאה אחת ב-M. הסבר:



חצים נוספים לא אפשריים.

מכאן שיש לולאה אחת לא לא ניתן שתהיה אחרת, כי זה היה גורם למצב שבו יוצא מכל מצב יותר מחץ בודד.
הלולאה זו יכולה להיות מאורך כלשהו > 0
ונסמן את אורך הלולאה ב-d.

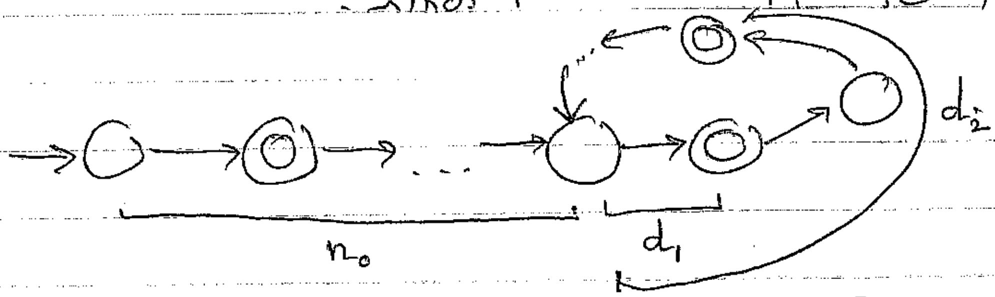
אם L שפה אינסופית המתקבלת ע"י M, אז

בהכרח יש לולאה ב M. זאת מפני שמספר
המצבים ב M סופי ולכן רק מספר סופי של
צעדים, d, מילה שאורכה גדול ממספר המצבים
ונקראה באוטומט M, תגיע למצב שכבר היתה
בו קודם. למשל, אם $x \in L(M)$ ו $|Q|<|x|$ אז
$x = x_0 x_1 \dots x_{n-1} x_n \dots x_l$

$$\underbrace{q_0 \xrightarrow{x_0} q_1 \xrightarrow{x_1} q_2 \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} q_n}$$

יש כאן $n+1$ מצבים, אך סה"כ יש n מצבים ולכן לפי עקרון שובך היונים יש מצב אחד שמופיע פעמיים לפחות.

אז אם: $L(M)$ אינסופית
אז יש ב M לולאה באורך d.
כעת נסתכל על המצבים המקבלים של M



נסמן את הגדלים הבאים:
- d - אורך הלולאה
- n_0 - המרחק מ q_0 לתחילת הלולאה
- d_i - המרחק מתחילת הלולאה למצב המקבל ה i בלולאה.

(כאשר i = מס' המצבים המקבלים בלולאה)

כעת, לכל $n_0 \le n$
אם $x \in L(M)$ ו $|x| \ge n_0$ אז מתקיים
ש $n \pmod d = d_i$ ו $|x| = n$
עבור $0 \le d_i < d$.

(54) $L \subseteq \Sigma^*$ L מתקבל ע"י FA

ומגדר $P(L) = \{|w| : w \in L\}$

(א) בהמשך לתרגיל 52.a ⊛

ניתן לומר שהשפה $P(L)$ (אורכי מילים) מתקבל ע"י FA.

ניזכר ב 52.a נאמר כי אם קיים הומומורפיזם $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ אז אם $L \subseteq \Sigma_1^*$ מתקבלת ע"י FA אז גם $h(L) \subseteq \Sigma_2^*$ מתקבלת ע"י FA. כיון $L \subseteq \Sigma_1^*$ אזי נבחר $\Sigma_2 = \{1\}$.

נתאר את h:

$\forall a \in \Sigma_1 \quad h(a) = 1$

ו-h מקיים את תכונת ההומומורפיזם ($h(\varepsilon)=\varepsilon$ ו- $h(w\sigma)=h(w)h(\sigma)$).

אנחנו משתמשים בהנחה שאורך הוא קידוד אונארי.

(למשל, אם $w=abc$ ($|w|=3$) בעצם, $|w|=111$)

אזי $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\} = \{1^{|w|} \mid w \in L\} = \{$שפת אורכי המילים ב L בקידוד אונארי$\}$

⊛ בהמשך לתרגיל 53 אפשר להגיד על $P(L)$ שהיא מהווה איחוד סופי של סדרות חשבוניות בעלות הפרש זהה, d.

כעת נפנה:

לכל שפה L אפשר להתאים אוטומט שיקבל את השפה הבאה $L' = \{a^n \mid \exists w \in L \ |w| = n\}$

ולכן $P(L') = \{n \mid a^n \in L'\} = P(L)$

ולכן לפי תרגיל 53 $P(L')$ איחוד סופי של סדרות חשבוניות.