אנליזה לחשמל
תרגול מס' 1 – חזרה על אלגברה לינארית

אנליזת פוריה
חלק מרכזי בקורס יעסוק בשיטות לקירוב פונקציות מחזוריות מסוגים שונים ע"י טורי פוריה – טורים של סינוסים וקוסינוסים:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(nx)+b_n sin(nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

(טור פוריה של f).

בהמשך נעסוק בהתמרת פוריה (עבור פונקציות לא מחזוריות), התמרת לפלס ועוד.

חזרה על אלגברה לינארית
<u>מרחב וקטורי</u> V מעל שדה F (אצלנו $F\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$) זוהי קבוצה V עם פעולות של חיבור וקטורים וכפל של וקטור בסקלר כך שלכל $u,v,w\in V$ ולכל $a,b,c\in F$:

אסוציאטיביות של חיבור: $(u+v)+w=u+(v+w)$.

קומוטטיביות: $u+v=v+u$.

קיום וקטור האפס: $u+0=u$.

קיום וקטור נגדי: לכל $u\in V$ קיים וקטור המסומן $-u$ המקיים $u+(-u)=0$.

דיסטריבוטיביות של כפל בסקלר ביחס לחיבור וקטורים: $a(v+u)=av+au$.

דיסטריבוטיות של כפל בסקלר ביחס לחיבור סקלרים: $(a+b)v=av+bv$.

אסוציאטיביות של כפל סקלרים בוקטור: $(a\cdot b)\cdot v=a\cdot(b\cdot v)$.

כפל באיבר היחידה של השדה: $1\cdot v=v$.

<u>דוגמא</u>: השתמש באקסיומות הנ"ל (ובאקסיומות של שדה) בכדי להוכיח כי לכל $v\in V$

$$0\cdot v=\vec{0}$$

<u>פיתרון</u>:

$$0\cdot v=(0+0)\cdot v=0\cdot v+0\cdot v \qquad /-(0\cdot v)$$ (קיום איבר נגדי)

$$\vec{0}=0\cdot v$$

<u>דוגמאות למרחבים וקטוריים</u>:

1. $\mathbb{C}^n$ - מרחב ה-n-יות

$$x=(x_1,\dots,x_n),\qquad x_i\in\mathbb{C}, i=1,\dots,n$$

2. דוגמה חשובה בקורס: $\boldsymbol{C[a,b]}$ - מרחב הפונקציות הרציפות המוגדרות על הקטע $[a,b]$ עם ערכים מרוכבים.

<u>תת מרחב וקטורי</u> $W\subset V$ הינו תת קבוצה לא ריקה של V המהווה בעצמה מרחב וקטורי עם פעולות החיבור והכפל בסקלר המושרות מ- V.

$(*)$ $W \subset V$ מהווה תת מרחב $\Longleftrightarrow$ $W \neq \emptyset$, W סגור תחת פעולות של חיבור וכפל בסקלר: לכל $u, v \in W$ ולכל $a \in F$:

$$u + v \in W, \qquad av \in W$$

<u>צירוף לינארי</u>: נאמר כי $v \in V$ הינו צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_n$ אם קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_n \in F$ כך ש:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

אוסף כל הצירופים הלינאריים של $v_1, \dots, v_n$ מהווה תת מרחב אשר נקרא תת המרחב הנפרש ע"י $v_1, \dots, v_n$ ומסומן ע"י $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$.

<u>תלות לינארית</u>: $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראים בת"ל אם:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ מהווה בסיס של V אם הם בת"ל ופורשים את V $\Longleftrightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה פורשת מינימלית של V.

בהנתן מרחב וקטורי V ייתכנו שתי אפשרויות:

1. ל- V אין בסיס סופי ואז $dimV = \infty$.
2. כל הבסיסים של V הם בעלי אותו מספר איברים $dim(V)$.

<u>דוגמא</u>: מהו המימד של $C[a, b]$?

<u>פיתרון</u>:

האם קיים אוסף סופי $\{f_1, \dots, f_n\}$ של פונקציות רציפות כך שלכל פונקציה רציפה $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ יש סקלרים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ כך ש:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$$

לכל $x \in [a, b]$?

נראה כי הקבוצה: $\{x^n : n \in \mathbb{N}\} \subset C[a, b]$ היא קבוצה אינסופית בת"ל (ואז ברור כי אין ל- $C[a, b]$ בסיס סופי)

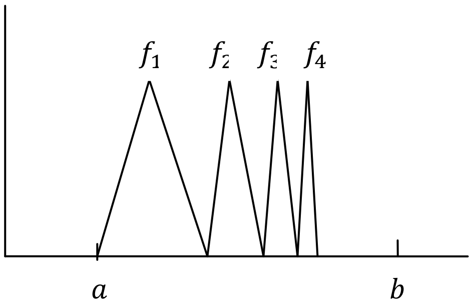
(קבוצה אינסופית היא בת"ל אם כל תת קבוצה סופית שלה היא בת"ל).

נקח קומבינציה לינארית סופית:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

זהו פולינום. מהמשפט היסודי של האלגברה יש ל- f לכל היותר n שורשים אלא אם כן $f \equiv 0$ כלומר $a_i = 0$ לכל $0 \leq i \leq n$ כנדרש.

<u>דרך הוכחה נוספת</u>: כמו שהסברתי בחלק מהתרגולים, ניתן לבחור סידרת פונקציות מהצורה הבאה:



יש לבחור את בסיסי המשולשים באורכים הולכים וקטנים כך שאינסוף פונקציות ייכנסו בקטע $[a,b]$.
נסו לחשוב מדוע האוסף האינסופי הזה הוא בת"ל ולמצוא נוסחה מתאימה לפונקציה f_n.

<u>תרגיל 1</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $u_1,\dots,u_n\in V$. הוכח כי $W=\mathrm{span}(u_1,\dots,u_n)$ מהווה תת מרחב וקטורי.

<u>פיתרון</u>: מספיק לבדוק סגירות תחת חיבור וכפל בסקלר ב- W.

יהיו $v,w\in W$. צ"ל כי $v+w\in W$. מכיוון ש- $v,w\in W$, קיימים סקלרים $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in F$ כך ש:

$$v=a_1u_1+\cdots+a_nu_n,\qquad w=b_1u_1+\cdots+b_nu_n$$

$$\Longrightarrow v+w=a_1u_1+\cdots+a_nu_n+b_1u_1+\cdots+b_nu_n=\overbrace{(a_1+b_1)}^{\in F}u_1+\cdots+\overbrace{(a_n+b_n)}^{\in F}u_n$$

זאת אומרת כי $v+w$ גם הוא צירוף של לינארי של $u_1,\dots,u_n$ ולכן גם:

$$v+w\in\mathrm{span}(u_1,\dots,u_n)=W$$

סגירות תחת כפל בסקלר – תרגיל בית.

<u>תרגיל 2</u>: יהי V מ"ו ויהיו $W_1,W_2\subset V$ תתי מרחבים וקטוריים של V כך שאף אחד מהם איננו מוכל בתוך השני: $W_1\not\subseteq W_2,\ W_2\not\subseteq W_1$. הוכח כי $W_1\cup W_2$ איננו תת מרחב וקטורי של V.

<u>פיתרון</u>:

<u>תזכורת</u>: עבור שתי קבוצות A,B נסמן $A-B=\{a: a\in A \text{ וגם } a\notin B\}$

נניח בשלילה כי $W_1\cup W_2$ הינו תת מרחב של V.

מכיוון ש- $W_2\not\subseteq W_1$, קיים $w_2\in(W_2-W_1)$.

מכיוון ש- $W_1\not\subseteq W_2$, קיים $w_1\in(W_1-W_2)$.

מכך ש- $w_1\in W_1$, נובע כי $w_1\in(W_1\cup W_2)$, ובאותו האופן $w_2\in(W_1\cup W_2)$.

מכיוון ש- $W_1\cup W_2$ הינו תת מרחב של V, הוא סגור תחת חיבור ולכן:

$$w_1+w_2\in(W_1\cup W_2)$$

יש שני מקרים אפשריים:

$$w_1+w_2\in W_1,\qquad w_1+w_2\in W_2$$

בלי הגבלת הכלליות: (זוהי אימרה שבה משתמשים כאשר הצעד שמתבצע בהוכחה עלול לפגוע בתקפות ההוכחה במקרה הכללי אך למעשה הוא איננו פוגע)

$$w_1 + w_2 \in W_1$$

מכיוון ש- W_1 הוא מרחב וקטורי ו- $w_1 \in W_1$, יש ל- w_1 איבר נגדי ב- W_1: $-w_1$. מהסגירות של W_1 תחת חיבור, נובע כי:

$$w_2 = \left(-w_1 + (w_1 + w_2)\right) \in W_1$$

בסתירה לבחירת w_2.

מש"ל.

תרגיל 3:הוכח או הפרך:

יהי V מ"ו תלת מימדי מעל F ונניח כי $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. אם W תת מרחב של V ממימד 2 אזי יש זוג מבין $\{v_1, v_2, v_3\}$ המהווים בסיס ל- W.

פיתרון: הטענה איננה נכונה.

דוגמא נגדית: נבחר $V = \mathbb{C}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי:

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)$$

ונבחר

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V:\ x + y + z = 0 \right\}$$

(ודא כי W הינו תת מרחב של V).

ניתן לבדוק כי $dimW = 2$ (בדוק!), אבל $v_1, v_2, v_3 \notin W$ ובפרט לא ייתכן כי זוג מתוכם פורש אותו.

נניח בשלילה (בה"כ) כי $W = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$, אזי:

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \in \mathrm{span}\{v_1, v_2\} = W$$

אבל סכום הקואורדינטות של v:

$$1 + 0 + 0 = 1 \neq 0$$

סתירה!

תרגיל בית: מצא שני וקטורים $u_1, u_2 \in V$ הפורשים את W.

תרגיל 4:

תהי B תת קבוצה של מרחב וקטורי V מעל F. הראו כי B בסיס אם"ם B קבוצה פורשת מינימלית. (קבוצה פורשת מינימלית היא קבוצה פורשת שכל תת קבוצה המוכלת בה ממש איננה קבוצה פורשת).

פיתרון:

B בסיס $\Leftarrow$ B קבוצה פורשת מינימלית:

מכיוון ש- B בסיס, B קבוצה פורשת. ניקח תת קבוצה $C \subsetneq B$ (C מוכלת ממש ב- B) ונניח בשלילה כי C פורשת את V. נסמן $C = \{u_1, \dots, u_n\}$.

נבחר $v \in (B - C)$. מכיוון ש- C פורשת את V, יש צירוף לינארי:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

$$\Longrightarrow 1 \cdot v - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$$

כלומר מצאנו צירוף לינארי לא טרוויאלי של איברים מ- B השווה ל- 0 בסתירה לכך ש- B קבוצה בת"ל.

<u>B קבוצה פורשת מינימלית $\Longleftarrow$ B בסיס</u>:

צריך להוכיח כי B קבוצה בת"ל. נסמן $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. נניח בשלילה כי יש סקלרים $a_1, \dots, a_n \in F$ לא כולם 0 כך ש-

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) נניח כי $a_1 \neq 0$. אזי לאחר העברת אגפים וחלוקה ב- a_1, נקבל:

$$v_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1} v_i$$

נבחר $v \in V$, אזי מכך ש- B קבוצה פורשת, יש צירוף לינארי:

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = \overbrace{-b_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1} v_i}^{b_1 v_1} + \sum_{i=2}^{n} b_i v_i = \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{b_1 a_i}{a_1} + b_i\right) v_i$$

כלומר כל $v \in V$ ניתן להציג כצירוף לינארי של $\{v_2, \dots, v_n\} \subsetneq B$, סתירה!