אנליזה לחשמל
תרגול מס' 10 – טורי פוריה

<u>תרגיל 1</u>: תהיינה f, g רציפות ומחזוריות. הראו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dx = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx\right)$$

<u>פיתרון</u>: נסמן a_n, b_n מקדמי פוריה של $f(x), g(x)$ בהתאמה.

ראשית, נראה כי השוויון נכון כאשר g היא פולינום טריגונומטרי:

$$g(x) \coloneqq \sum_{k=-n_0}^{n_0} b_k e^{ikx} \Longrightarrow g(nx) = \sum_{k=-n_0}^{n_0} b_k e^{iknx}$$

נחשב:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\sum_{k=-n_0}^{n_0} b_k e^{iknx}\right)dx =$$

$$= \sum_{k=-n_0}^{n_0} b_k \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-kn)x}dx\right) = \sum_{k=-n_0}^{n_0} b_k a_{-nk} = b_0 a_0 + \sum_{\substack{k=-n_0\\k\neq 0}}^{n_0} b_k a_{-nk}$$

לכל $k \neq 0$, מהלמה של רימן לבג:

$$a_{-nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dx = b_0 a_0 + \sum_{\substack{k=-n_0\\k\neq 0}}^{n_0} b_k a_{-nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0 b_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx\right)$$

כנדרש.

כעת, תהי g פונקציה רציפה ומחזורית כלשהי. נראה כי השוויון מתקיים.

יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא n_0 כך שלכל $n > n_0$:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx\right)\right| < \varepsilon$$

f מחזורית ורציפה ולכן חסומה על $\mathbb{R}$, יהי $M > 0$ כך ש- $|f(x)| \leq M$ לכל x.

מהמסקנה ממשפט פייר, קיים פולינום טריגונומטרי $p(x)$ כך ש- $|g(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ לכל x.

ראינו כי השוויון תקף לכל פולינום טריגונומטרי ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(nx)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)dx\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

אם כן, לכל $n > n_0$:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(g(nx) - p(nx) + p(nx)\big)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(g(x) - p(x) + p(x)\big)dx\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{|f(x)|}^{\leq M}\,\overbrace{\big|\big(g(nx) - p(nx)\big)\big|}^{<\frac{\varepsilon}{3M}}\,dx +$$

$$+ \overbrace{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(nx)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)dx\right)\right|}^{<\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{|f(x)|}^{\leq M}\,dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{|g(x) - p(x)|}^{<\frac{\varepsilon}{3M}}\,dx\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

כנדרש.

<u>תרגיל 2</u>: תהי f מחזורית עם מקדמי פוריה c_n. הראה כי:

$$\sigma_N(f;x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)c_n e^{inx}$$

<u>פיתרון</u>: נחשב:

$$\sigma_N(f;x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f;x) =$$

$$= \frac{1}{N+1}\left(\overbrace{c_0}^{S_0(f;x)} + \overbrace{(c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix})}^{S_1(f;x)} + \overbrace{(c_{-2}e^{-2ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix})}^{S_2(f;x)} + \cdots\right) =$$

$$= \{\text{קיבוץ איברים}\} =$$

$$= \frac{1}{N+1}\Big((N+1)c_0 + N\big(c_{-1}e^{-ix} + c_1 e^{ix}\big) + (N-1)\big(c_{-2}e^{-2ix} + c_2 e^{2ix}\big) + \cdots\Big) =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)c_n e^{inx}$$

כנדרש.

<u>תרגיל 3</u>: תהי f רציפה ומחזורית עם מקדמי פוריה c_n ונניח כי $nc_n \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$. הוכח כי

$$S_N(f;x) \longrightarrow f(x)$$

במ"ש.

(בפרט, לפי מה שהוכחתם בתרגיל הבית, נובע כי אם f גזירה ברציפות אזי $S_N(f) \longrightarrow f$ במ"ש).

<u>פיתרון</u>: יהי $\varepsilon > 0$. רוצים למצוא N_0 כך שלכל $N > N_0$:

$$\|S_N(f) - f\|_\infty < \varepsilon$$

(שכן כזכור התכנסות במ"ש שקולה להתכנסות בנורמת ∞).

מכיוון ש- f רציפה ומחזורית, לפי משפט פייר קיים N_1 כך שלכל $N > N_1$:

$$\|\sigma_N(f) - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

נחשב:

$$S_N(f;x) - \sigma_N(f;x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} - \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) c_n e^{inx} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{|n|}{N+1} c_n e^{inx}$$

$$\Longrightarrow \|S_N(f) - \sigma_N(f)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=-N}^{N} \frac{|n|}{N+1} c_n e^{inx} \right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n=-N}^{N} \left| \frac{|n|}{N+1} c_n e^{inx} \right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n=-N}^{N} \left| \frac{|n|}{N+1} c_n \right| = \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N}^{N} |nc_n| = \overbrace{\frac{2N}{N+1}}^{\text{חסומה}} \overbrace{\left(\frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} |nc_n| \right)}^{\substack{\text{סדרת הממוצעים של } nc_n \\ \to 0}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

לכן, קיים N_2 כך שלכל $N > N_2$:

$$\|S_N(f) - \sigma_N(f)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ ונקבל עבור כל $N > N_0$:

$$\|S_N(f) - f\|_\infty \le \|S_N(f) - \sigma_N(f)\|_\infty + \|\sigma_N(f) - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כנדרש.

<u>שאלה למחשבה</u>: איזה קירוב הוא קירוב טוב יותר ל- f: $S_N(f)$ או $\sigma_N(f)$?