אנליזה לחשמל
תרגול מס' 12 – התמרת פוריה

<u>הגדרה</u>: $L^1_{pc}(\mathbb{R})$ או $G(\mathbb{R})$ - מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין על $\mathbb{R}$ (כלומר רציפות למקוטעין על כל קטע סופי) ואינטגרביליות בהחלט על $\mathbb{R}$ כלומר מקיימות:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$$

<u>הגדרה</u>: בהנתן $f \in G(\mathbb{R})$, נגדיר את התמרת פוריה של f:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

<u>נוסחת היפוך (משפט ההתמרה ההפוכה)</u>:

1. נניח כי $\hat{f}, f \in G(\mathbb{R})$ וכי f רציפה, אזי לכל x מתקיים:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

2. תחת אותם תנאים, מתקיים:

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x) = \frac{1}{2\pi}f(-x)$$

<u>הסבר</u>:

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\big(\mathcal{F}(f)\big)(\omega)\Big)e^{-i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega(-x)}d\omega \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}f(-x)$$

<u>תרגיל 1</u>: חשב את התמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$ ושל $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

<u>הגדרה</u>: פונקציה $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ תקרא <u>חסומה בזמן</u> אם קיים $M > 0$ כך ש- $f(x) = 0$ לכל $|x| > M$ (במקרה זה, נאמר כי ל- f יש תומך קומפקטי).

פונקציה תקרא <u>חסומה בתדר</u> אם קיים $M > 0$ כך ש- $\hat{f}(\omega) = 0$ לכל $|\omega| > M$ (במקרה זה נאמר כי ל- $\hat{f}$ יש תומך קומפקטי).

<u>הגרסה הרציפה של הלמה של רימן לבג</u>: אם $f \in G(\mathbb{R})$ אזי $\hat{f}(\omega) \xrightarrow[|\omega|\to\infty]{} 0$.

<u>תרגיל 2</u>: נסמן:

$$D_r(x) = \int_{-r}^{r}e^{i\omega x}d\omega$$

(כלומר D_r הינו הגרסה של גרעין דיריכלה במקרה הלא מחזורי). תהי $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה בעלת תומך קומפקטי כך ש- $f(0) = 0$ ו- f גזירה ב- 0. הוכח כי:

$$D_r * f(0) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

תרגיל 3:

בתנאי התרגיל הקודם, הוכח כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$D_r * f(x) = 2\pi \int_{-r}^{r} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

תרגיל 4:

הראו כי לפולינום טריגונומטרי שאינו פולינום ה- 0 יש לכל היותר מספר סופי של אפסים במחזור.

תרגיל 5: תהי $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה חסומה בזמן שאיננה פונקציית ה- 0. הראו כי $\hat{f}$ איננה חסומה בתדר.

תרגיל 6:

נסמן עבור $c > 0$, $g_c(x) = e^{-cx^2}$ (כזכור, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$). מצא נוסחה מפורשת ל- $\widehat{g_c}$ (ניתן להניח כי ניתן לבצע גזירה מתחת לסימן האינטגרל בנוסחה להתמרת פוריה של g_c).

תרגיל 7: הראו כי עבור $a, b > 0$ קיימים קבועים k, c כך ש- $g_a * g_b = k g_c$.