אנליזה לחשמל
תרגול מס' 13 – התמרת פוריה

<u>נוסחת פלנשרל</u>: תהי $f \in L^1_{pc}(-\infty,\infty)\bigcap L^2_{pc}(-\infty,\infty)$, אזי:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

כלומר:

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2 = \left\|\hat{f}\right\|_2^2$$

<u>תרגיל 1</u>: נניח כי f גזירה אינסוף פעמים וחסומה בזמן שאיננה פונקצית ה- 0. הראו כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(n)}(x)\right|^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

<u>פיתרון</u>: עפ"י התרגול הקודם, f איננה חסומה בתדר ולכן קיים $\omega_0 \notin [-1,1]$ כך ש:

$$\hat{f}(\omega_0) \neq 0$$

מכיוון ש- $\hat{f}$ רציפה, קיים $\delta > 0$ כך ש- $\hat{f}(\omega) \neq 0$ לכל $\omega \in [\omega_0-\delta,\omega_0+\delta]$. ניתן להניח כי:

$$[-1,1]\bigcap[\omega_0-\delta,\omega_0+\delta] = \emptyset$$

(ע"י לקיחת δ מספיק קטן).

נסמן:

$$I = \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

ונסמן בנוסף:

$$a = min\{|\omega_0-\delta|,|\omega_0+\delta|\}$$

אזי בהכרח $a > 1$ ו- $I > 0$.

נשתמש בתכונה של $\mathcal{F}$: אם $f \in G(\mathbb{R})$, וגם f רציפה וגזירה ברציפות למקוטעין, $f' \in G(\mathbb{R})$ וגם $f(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$, אזי:

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$$

באינדוקציה, אם f גזירה ברציפות n פעמים וכל הנגזרות שייכות ל- $G(\mathbb{R})$ אזי:

$$(*)\quad \boxed{\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n\hat{f}(\omega)}$$

כעת:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(n)}(x)\right|^2 dx = \{\text{פלנשארל}, (*)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|(i\omega)^n\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\overbrace{\left|\omega^{2n}\right|}^{\geq a^{2n}}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \geq$$

$$\geq a^{2n}I \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

כנדרש.

Exercise (2010 Moed B)

Find a function $f \in G(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ that satisfies the following equation:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+(x-t)^2}dt = \frac{x}{(9+x^2)^2}.$$

Solution:

Define $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Note that the left-hand side of the equation is $(f*g)(x)$. Our strategy will be to apply the Fourier transform to both sides of the equation, in hope it will allow us to find an expression for $\hat{f}(\omega)$, and after that we can find f from its transform. Since the left-hand side is $(f*g)(x)$, its Fourier transform is $2\pi\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$, and we have already found in the previous quiz section that $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$. We still need to find the transform of the right hand side. Note:

$$g'(x) = -2x\frac{1}{(1+x^2)^2},$$

therefore:

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{x}{3}\right) &= -2\frac{\frac{x}{3}}{\left(1+\frac{x^2}{9}\right)^2} \\ &= -2\frac{\frac{x}{3}\cdot 81}{\left(1+\frac{x^2}{9}\right)^2\cdot 9^2} \\ &= -54\frac{x}{(9+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Hence $\frac{x}{(9+x^2)^2} = -\frac{1}{54}g'\left(\frac{x}{3}\right)$, therefore:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{x}{(9+x^2)^2}\right)(\omega) &= \mathcal{F}\left(-\frac{1}{54}g'\left(\frac{x}{3}\right)\right)(\omega) \\ &= -\frac{1}{54}\mathcal{F}\left(g'\left(\frac{x}{3}\right)\right)(\omega) \\ &= -\frac{3}{54}\mathcal{F}(g'(x))(3\omega) \\ &= -\frac{3}{54}\cdot i\cdot 3\omega\mathcal{F}(g(x))(3\omega) \\ &= -\frac{3}{54}\cdot i\cdot 3\omega\frac{1}{2}e^{-|3\omega|} \\ &= -\frac{1}{12}i\omega e^{-|3\omega|}. \end{aligned}$$

We apply the Fourier transform to both sides of the equation to get:

$$2\pi\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega) = -\frac{1}{12}i\omega e^{-|3\omega|}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= -\frac{1}{12}i\omega e^{-|3\omega|}\frac{1}{2\pi\hat{g}(\omega)}\\ &= -\frac{1}{12}i\omega e^{-|3\omega|}\frac{1}{2\pi\frac{1}{2}e^{-|\omega|}}\\ &= -\frac{1}{12\pi}i\omega e^{-|2\omega|}.\end{aligned}$$

We now try to find a function with the same transform.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)(\omega) &= 2\hat{g}(2\omega)\\ &= e^{-|2\omega|},\end{aligned}$$

therefore:

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)(\omega) = i\omega e^{-|2\omega|}$$

and:

$$\mathcal{F}\left(-\frac{1}{12\pi}\frac{d}{dx}\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)(\omega) = -\frac{1}{12\pi}i\omega e^{-|2\omega|} = \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Since the Fourier transform is unique, we have:

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{12\pi}\frac{d}{dx}\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{12\pi}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\\ &= -\frac{4}{12\pi}\frac{d}{dx}\frac{1}{4+x^2}\\ &= \frac{8}{12\pi}\frac{x}{(4+x^2)^2}\\ &= \frac{2}{3\pi}\frac{x}{(4+x^2)^2}.\end{aligned}$$