

אנליזה לחשמל

תרגול מס' 3 – תהליך גרם שמידט וקירוב מיטבי

נתון מרחב וקטורי נורמי V ונתון $u \in V$.

נתון תת מרחב $W \subset V$.

הגדרה: נאמר ש- $u^* \in W$ הוא קירוב מיטבי ל- u ב- W אם לכל $w \in W$:

$$\|u - u^*\| \leq \|u - w\|$$

משפט: נניח כי V מרחב מכפלה פנימית, אזי $u^* \in W$ הוא קירוב מיטבי ל- u אם $(u - u^*) \perp W$ (ז"א כי $(u - u^*) \perp w$ לכל $w \in W$).

הגדרה: בהנתן $u \in V$ ותת מרחב $W \subset V$, וקטור $u^* \in W$ המקיים $(u - u^*) \perp W$ נקרא ההיטל האורתוגונלי של u על W (ולכן מהמשפט הקודם נובע כי ההיטל האורתוגונלי הוא קירוב מיטבי).

טענה: אם במרחב מכפלה פנימית V קיים קירוב מיטבי u^* ל- u ב- W אזי קירוב מיטבי זה הינו יחיד.

הגדרה: מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V היא קבוצה (סופית או אינסופית) של וקטורים $\{e_i\}$ כך שמתקיים:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

הגדרה: מערכת אורתוגונלית היא סידרה של וקטורים $\{u_i\}$ השונים מ-0 כך ש- $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$.

בהנתן מערכת אורתוגונלית אנו יכולים לייצר מערכת אורתונורמלית ע"י נרמול:

$$e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

משפט: תהי $\{e_1, \dots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית סופית במרחב מכפלה פנימית V , אזי:

1. אם $u \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ אזי:

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$$

2. $\{e_1, \dots, e_n\}$ בת"ל.

3. אם $u, v \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ אזי:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}, \quad \langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2$$

משפט: תהי $\{e_1, \dots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית סופית במרחב מכפלה פנימית V , ויהי:

$$W = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

אזי לכל $u \in V$ ההיטל האורתוגונלי של u על W קיים ונתון ע"י:

$$u^* = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$$

תהליך גרם-שמידט: מציאת בסיס אורתונורמלי בתת-מרחב ממימד סופי.

נתונים $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל. נגדיר:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad \forall k \in \{2, \dots, n\}: \tilde{e}_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, e_i \rangle e_i, \quad e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}$$

אזי $\{e_1, \dots, e_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

תרגיל 1: יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה ≥ 2 מעל \mathbb{R} . לפולינומים p, q , נגדיר:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית על V ומצאו בסיס אורתונורמלי ל- V .

פיתרון: נראה כי $\langle p, p \rangle = 0 \Rightarrow p = 0$ (יתר הבדיקות – תרגיל בית).

$$\langle p, p \rangle = 0 \Rightarrow (p(-1))^2 + (p(0))^2 + (p(1))^2 = 0$$

$$\Rightarrow p(-1) = p(0) = p(1) = 0$$

לפולינום ממעלה 2 יש לכל היותר 2 שורשים שונים ולכן בהכרח $p = 0$.

נמצא בסיס אורתונורמלי ע"י הפעלת תהליך גרם שמידט על הבסיס הסטנדרטי $B = (1, x, x^2)$:

$$\|v_1\|^2 = (1(-1))^2 + (1(0))^2 + (1(1))^2 = 3, \quad e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tilde{e}_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} = x - \frac{1}{3} \langle x, 1 \rangle = x - \frac{1}{3}((-1) + 0 + 1) = x$$

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{x}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{e}_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = x^2 - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} - \langle x^2, \frac{x}{\sqrt{2}} \rangle \frac{x}{\sqrt{2}} =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} \langle x^2, 1 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^2, x \rangle = x^2 - \frac{1}{3}((-1)^2 + 0^2 + 1^2) - \frac{1}{2}((-1)^3 + 0^3 + 1^3) = x^2 - \frac{2}{3}$$

$$e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} = \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{(1 - \frac{2}{3})^2 + (0 - \frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{2}{3})^2}} = \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow B' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) \right)$$

בסיס אורתונורמלי ל- V כנדרש.

תרגיל 2: (מבחון)

מצא את כל הערכים של $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ כך ש:

$$\int_{-1}^1 |x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

יהיה קטן ביותר.

פיתרון: נשים לב כי הנוסחה הבאה:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x)\overline{g'(x)} dx$$

מגדירה מכפלה פנימית על $V = C^1[-1,1]$ (פונקציות הגזירות פעם אחת ברציפות על הקטע $[-1,1]$) עם הנורמה המושרית:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx + \int_{-1}^1 |f'(x)|^2 dx}$$

(בדוק כי אקסיומות המכפלה הפנימית אכן מתקיימות!)

נבחר $f = x^3$, ונגדיר $W = \text{span}\{1, x, x^2\}$.

אם כן, אנו מתבקשים בשאלה למצוא קירוב טוב ביותר ל- f ב- W .

מהמשפטים הנ"ל, מספיק למצוא בסיס אורתונורמלי ל- W ולחשב את ההיטל האורתוגונלי של f על W (זהו הקירוב הטוב ביותר הנדרש).

טענת עזר 1: אם $f \in V$ אי זוגית אזי f' זוגית. אם $f \in V$ זוגית אזי f' אי-זוגית.

הוכחה: נניח כי f אי זוגית, אזי:

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \{t = -h\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{f(x+t) - f(x)}{-t} = f'(x) \end{aligned}$$

עבור f זוגית ההוכחה דומה (בדוק!).

טענת עזר 2: אם $f, g \in V$ כך ש- f היא פונקציה אי-זוגית ו- \bar{g} פונקציה זוגית (או להיפך) אזי $\langle f, g \rangle = 0$.

הוכחה:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \overbrace{f(x)\overline{g(x)}}^{\text{אי זוגית}} dx + \int_{-1}^1 \overbrace{f'(x)\overline{g'(x)}}^{\text{לפי טענה 1}} dx = 0$$

נפעיל גרם שמידט על $\{1, x, x^2\}$:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 |1|^2 dx + \int_{-1}^1 |0|^2 dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{e}_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = x - \overbrace{\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} = x$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^1 |x|^2 dx + \int_{-1}^1 |1|^2 dx}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3} + 2}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} \\
\tilde{e}_3 &= v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = \\
&= x^2 - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \overbrace{\langle x^2, \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} \rangle}^0 \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = x^2 - \frac{1}{2} \langle x^2, 1 \rangle = \\
&= x^2 - \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 x^2 \cdot \bar{1} dx + \int_{-1}^1 2x \cdot 0 dx \right) = x^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + 0 \right) = x^2 - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\|\tilde{e}_3\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \left| x^2 - \frac{1}{3} \right|^2 dx + \int_{-1}^1 |2x|^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \right) dx + \int_{-1}^1 4x^2 dx} = \frac{8\sqrt{\frac{2}{5}}}{3}$$

$$e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{8\sqrt{\frac{2}{5}}}{3}}$$

$$\Rightarrow B' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}}, \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{8\sqrt{\frac{2}{5}}}{3}} \right)$$

בסיס אורתונורמלי ל- W .

כעת, ההיטל האורתוגונלי של f על W :

$$\begin{aligned}
E(f) &= \sum_{i=1}^3 \langle f, e_i \rangle e_i = \overbrace{\langle x^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle x^3, \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} \rangle \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} + \overbrace{\langle x^3, \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{8\sqrt{\frac{2}{5}}}{3}} \rangle}^0 \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{8\sqrt{\frac{2}{5}}}{3}} = \\
&= \frac{3}{8} \langle x^3, x \rangle x = \left(\frac{3}{8} \int_{-1}^1 x^3 \cdot \bar{x} dx + \frac{3}{8} \int_{-1}^1 3x^2 \cdot \bar{1} dx \right) x = \\
&= \frac{3}{8} \left(\frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 + x^3 \Big|_{-1}^1 \right) x = \frac{3}{8} \cdot \frac{12}{5} x = \frac{9}{10} x \\
&\Rightarrow \alpha = \gamma = 0, \quad \beta = \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

תרגיל 3: יהי V ממ"פ ויהיו $u, v \in V$. הראה כי $u = v$ אם $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ לכל $w \in V$.
פיתרון: הכיוון הראשון ברור.

לכיוון השני, נניח כי לכל $w \in V$, $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$, אזי ע"י העברת אגפים, נקבל כי:

$$\langle u - v, w \rangle = 0$$

לכל $w \in V$ ובפרט, עבור $w = u - v$ נקבל כי:

$$\langle u - v, u - v \rangle = 0$$

ולכן בהכרח $u - v = 0$ כלומר $u = v$.

תרגיל 4: יהי $W \subset V$ תת-מרחב ממימד n של ממ"פ V . יהי נסמן ב- P את ההיטל האורתוגוני של V על W . הוכח כי:

$$\langle P(u), v \rangle = \langle u, P(v) \rangle$$

לכל $u, v \in V$.

פיתרון: יהיו $u, v \in V$ ויהי $B = (e_1, \dots, e_n)$ בסיס אורתונורמלי של W (לפי משפט גרהם שמידט בהכרח קיים בסיס כזה), אזי:

$$\begin{aligned} \langle P(u), v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \langle u, e_i \rangle e_i, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle e_i, v \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u, \overline{\langle e_i, v \rangle} e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, \langle v, e_i \rangle e_i \rangle = \left\langle u, \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i \right\rangle = \\ &= \langle u, P(v) \rangle \end{aligned}$$

כנדרש.

Examples for non-existence and non-uniqueness of best approximation

Example for non-uniqueness:

Let $V = \mathbb{R}^2$ with the maximum norm, that is, $\|u\| = \max(|u_1|, |u_2|)$. For example, $\|(1, -3)\| = 3$. Let $W = \{u \in V : u_2 = 0\}$. Let the vector $u \in V$, which we are going to approximate within W , be $u = (0, 1)$. We want to show that more than one best approximation of u within W exists. First, we find the minimal distance of any $w \in W$ from u . $\forall w \in W$:

$$\begin{aligned} \|u - w\| &= \max(|u_1 - w_1|, |u_2 - w_2|) \\ &\geq |u_2 - w_2| \\ &= |1 - 0| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Now, consider a first candidate to be a best approximation of u within W , $\hat{u} = (0, 0)$. $\|u - \hat{u}\| = 1$, since for any $w \in W$ we have shown $\|u - w\| \geq 1$, \hat{u} is a best approximation of u within W . It is left to find another best approximation in order to show that best approximation is not unique in this case. Consider a second candidate to be a best approximation of u within W , $\tilde{u} = (0.5, 0)$. $\|u - \tilde{u}\| = \max(|u_1 - \tilde{u}_1|, |u_2 - \tilde{u}_2|) = \max(|0 - 0.5|, |0 - 1|) = 1$. Therefore \tilde{u} is also a best approximation of u within W . We have shown an example of a best approximation being non-unique. If V was an inner-product space, we could not have found such an example. That is - if V is an inner-product space, $W \subset V$ a subspace and $u \in V$, if \hat{u} is a best approximation of u within W and \tilde{u} is also a best approximation of u within W , then $\hat{u} = \tilde{u}$. This means that in an inner-product space, if a best approximation exists, it is unique. However, a best approximation may not exist, as we will show in the next example.

Example for non-existence:

Let $V = l^2$, that is, V is the space of all sequences v of complex numbers such that $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 < \infty$. V is equipped with the norm $\|v\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2}$. Let $W \subset V$ be $W = \{v \in V : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } v_n = 0 \forall n > n_0\}$. That is, W is the subspace of all sequences that have a finite number of non-zero coordinates. Consider the vector $u \in V$ defined by $u_n = \frac{1}{n}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ therefore indeed $u \in V$. We want to show that a best approximation of u within W does not exist. We will show that given any $\epsilon > 0$ we can find $\hat{u} \in W$ with $\|u - \hat{u}\| < \epsilon$ but that there is no $\hat{u} \in W$ that satisfies $\|u - \hat{u}\| = 0$, which will rule out the existence of a best approximation. We define $\{x^j\}_{j=1}^{\infty} \subset W$ as $x_n^j = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \leq j \\ 0 & n > j \end{cases}$. $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ is a sequence of vectors in V , each element of this sequence, which is a vector in V , is by itself a sequence of numbers. We use the upper index j to

indicate the coordinate within the sequence of vectors and the lower index n to indicate the coordinate within the sequence of numbers. That is, x_n^j indicates the n 'th number in the j 'th vector. Some examples: $x_1^1 = 1$, $x_2^1 = 0$, $x_2^2 = \frac{1}{2}$. So for each $j \in \mathbb{N}$, $x^j \in W$ is a sequence of numbers and we denote its elements by x_n^j . Notice the relation between this sequence of vectors and u : $x_n^j = u_n \ \forall n \leq j$.

Now:

$$\|u - x^j\| = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

This convergence means that for any $\epsilon > 0$ exists $j_0 \in \mathbb{N}$ such that $j > j_0$ implies $\|u - x^j\| < \epsilon$. It is still left to use what we showed so far to prove that a best approximation of u in W doesn't exist. We assume in negation that \hat{u} , a best approximation of u in W does exist. If $\|u - \hat{u}\| = 0$ then $u = \hat{u}$, but $u \notin W$ and $\hat{u} \in W$. This is a contradiction, therefore $\|u - \hat{u}\| = \epsilon > 0$. But we have already shown that for any $\epsilon > 0$, we can find j_0 such that for any $j > j_0$ we have $\|u - x^j\| < \epsilon = \|u - \hat{u}\|$. This is a contradiction to the assumption that \hat{u} is a best approximation of u within W . Therefore a best approximation doesn't exist in this case. Here are two sufficient conditions for the existence and uniqueness of a best approximation in W for any vector in V :

1. V is an inner-product space and $W \subset V$ is a subspace of finite dimension
2. V is a complete inner-product space and $W \subset V$ is a closed subspace