

אנליזה לחשמל

תרגול מס' 5 – התכנסות בנורמה

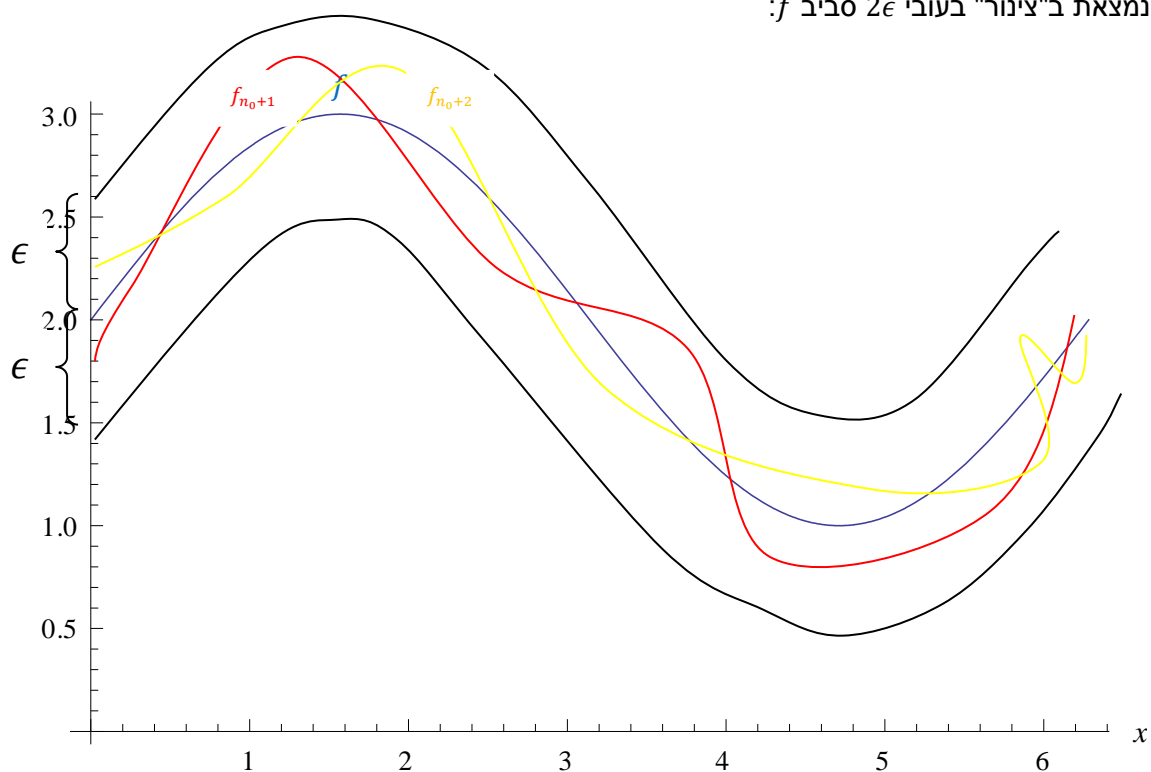
הגדרה: נאמר שסידרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)$ ב- A אם לכל $\epsilon > 0$ ולכל $x \in A$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

הגדרה: נאמר שסידרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ ב- A אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ ולכל $x \in A$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

הסבר גרפי: נאמר שסידרת פונקציות $f_n \rightarrow f$ במ"ש אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n, n > n_0$ נמצאת ב"צינור" בעובי 2ϵ סביב f :



יהי V מרחב נורמי.

הגדרה: נאמר כי סידרה $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ ב- V מתכנסת ל- $v \in V$ אם:

$$\|v_n - v\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר: $v_n \rightarrow v$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$:

$$\|v_n - v\| < \epsilon$$

הגדרה: $PC[a, b]$ הוא מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[a, b]$ (כלומר פונקציות שאינן רציפות במספר סופי של נקודות ובנקודות אלה קיימים הגבולות החד-צדדיים – אי רציפות סליקה או מסוג ראשון).

נגדיר על $PC[a, b]$ שתי נורמות:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

$\|\cdot\|_2$ הנקראת נורמת L^2 היא הנורמה הנובעת מהמכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

(בדוק כי $\|\cdot\|_1$ הנקראת נורמת L^1 איננה נורמת מכפלה פנימית!).

תרגיל 1: הוכח כי $f_n(x) = x^n$ מתכנסת ל- $f(x)$ נקודתית אך לא במ"ש בקטע $[0, 1]$ כאשר:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

בדוק התכנסות בנורמות L^1 ו- L^2 .

תרגיל 2:

נגדיר $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ בקטע $[0, 1]$. בדוק התכנסות נקודתית, במ"ש ובנורמות L^1, L^2 .

תרגיל 3: $V = C[a, b]$ עם הנורמה:

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

מתי סידרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת לפונקציה f ?

תרגיל 4: (תרגיל 6, עבודה 2, 2008)

תן דוגמא לסידרת פונקציות רציפות (f_n) בקטע $[a, b]$ המתכנסת בנורמת L^2 כך שסידרת הנגזרות (f'_n) איננה מתכנסת בנורמת L^2 .

תרגיל 5: (שאלה 7, עבודה 2, 2008)

יהי V המרחב הוקטורי של פונקציות רציפות בקטע $[0, \infty)$ המקיימות:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x} dx < +\infty$$

עם הנורמה המתאימה (ראה עבודת בית 1).

1. הוכח כי אם סדרת פונקציות (f_n) ב- V מתכנסת במ"ש בקרן $[0, \infty)$ לפונקציה f אזי $f \in V$ ו- $f_n \rightarrow f$ בנורמה.

2. מצא סידרת פונקציות ב- V המתכנסת בנורמה אך איננה מתכנסת במ"ש בקרן $[0, \infty)$.

3. מצא סידרת פונקציות ב- V המתכנסת נקודתית ב- $[0, \infty)$ אך איננה מתכנסת בנורמה.