אנליזה לחשמל

תרגול מס' 6 – מערכות אורתונורמליות אינסופיות

V מרחב מכפלה פנימית.

<u>משפט</u>: תהי $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית במרחב מכפלה פנימית V ויהי $u \in V$. הטענות הבאות שקולות:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |<u, e_i>|^2 = \|u\|^2$$

(כלומר מתקיים שוויון באי-שוויון בסל, שוויון זה נקרא שוויון פרסבל).

$$(2) \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} <u, e_i> e_i$$

$$(3) \quad u \in \overline{\operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^{\infty}}$$

במקרה שהתנאים השקולים של המשפט האחרון מתקיימים לכל $u \in V$, המערכת האורתונורמלית $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ נקראת <u>סגורה</u>.

<u>משפט</u>: כל פונקציה $f \in L^2_{PC}[a,b]$ ניתן לקרב בנורמה (ואף במידה שווה) ע"י פונקציה קבועה למקוטעין על $[a,b]$

<u>תרגיל</u> (בוחן 2 – 2008)

תהי $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית ב- $V = L^2_{PC}[0,1]$ כך שלכל $a \in [0,1]$ מתקיים:

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^a \varphi_i(x) \right|^2$$

הוכח כי $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

<u>פיתרון</u>: נגדיר $f_a(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < a \\ 0, & a \le x \le 1 \end{cases}$. הנתון אומר כי לכל $a \in [0,1]$ מתקיים שוויון פרסבל עבור f_a. מהמשפט הנ"ל נובע כי $W \coloneqq \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$ $f_a \in$ לכל a.

נשים לב כי לכל $a, b \in [0,1]$:

$$f_a - f_b = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מכיון ש- W הוא תת מרחב וקטורי (סגור תחת סכומים והכפלות בקבועים), נובע כי W מכיל את כל הפונקציות הקבועות למקוטעין.

רוצים להוכיח כי $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה. נוכיח כי (3) מתקיים לכל $f \in V$.

תהי $f \in V$ ויהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא צירוף ליניארי - $\sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i$ המקיים:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i \right\| < \varepsilon$$

ממשפט קודם, ניתן לקרב את f בנורמה ע"י פונקציה קבועה למקוטעין. קיימת g קבועה למקוטעין כך ש:

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ראינו כי $g\in W=\overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$ ולכן יש צירוף לינארי סופי $\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i$ כך ש:

$$\left\|g-\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

סה"כ:

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i\right\|=\left\|f-g+g-\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i\right\|\overset{\substack{\text{א"ש}\\\text{המשולש}}}{\leq}\|f-g\|+\left\|g-\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i\right\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כנדרש.