

# אנליזה לחשמל

## תרגול מס' 7 – טורי פוריה

$V = L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ . מההרצאות ידוע כי המערכות הבאות אורתונורמליות:

$\frac{1}{\sqrt{2}}, \{\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}, \{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$  - גרסה ממשית.

$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  - גרסה מרוכבת.

עבור כל מערכת אנחנו משתמשים במכפלה פנימית שונה בהכפלה בקבוע כדי לקבל שהגודל של הוקטורים יהיה 1)

בהמשך הקורס נראה כי אלו הן מערכות אורתונורמליות סגורות.

טור פוריה של  $f$ :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e^{inx} \rangle e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

שוויון פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e^{inx} \rangle|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

תרגיל 1: (בוחן 2008)

מצא טור פוריה של:

$$f(x) = e^{ax}$$

כאשר  $a \in \mathbb{R}$ .

פיתרון:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a-in} (e^{(a-in)x})_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)} = \frac{(-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{2\pi(a-in)} \end{aligned}$$

לכן, טור פוריה של  $f$  הוא:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{2\pi(a-in)} e^{inx}$$

תרגיל 2: (בוהן 2008)

חשב את הסכום:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

כאשר  $a \in \mathbb{R}$  אינו שלם.

פיתרון:

נשתמש בשוויון פרסבל עבור  $f$  מתרגיל 3:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ax}|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2ax} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{2ax}}{2a} \right)_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{2\pi(a - in)} \right|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a^2 + n^2} \right|^2 = \\ &= \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}}{2a}$$

$$\frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}{2\pi} \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}}{2a} - \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}{2\pi a^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \pi \frac{e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}}{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2 2a} - \frac{1}{2a^2}$$

תרגיל 3: נתונה  $f$  מחזורית וגזירה ברציפות. חשב את מקדמי פוריה של  $f'$  במונחים של מקדמי פוריה של  $f$ .

פיתרון:

נסמן ב-  $c_n$  את מקדם פוריה ה-  $n$  של  $f$  וב-  $c'_n$  את מקדם פוריה של  $f'$ . נחשב:

$$c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} d(f(x)) \stackrel{\text{בחלקים}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d(e^{-inx})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( (f(x) e^{-inx})_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d(e^{-inx}) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \overbrace{\left( f(\pi) e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{in\pi} \right)}^0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d(e^{-inx}) \right) = in \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) =$$

$$= \boxed{inc_n}$$

טענה: אם  $f, g$  רציפות ומחזוריות ומקדמי הפוריה שלהם שווים אזי  $f = g$  (הוכחה בהמשך הקורס).

תרגיל 4: תהי  $f$  פונקציה מחזורית וגזירה ברציפות המקיימת:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

הראו כי:

$$\|f'\|_2^2 \geq \|f\|_2^2$$

ומיצאו את הפונקציות עבורן מתקיים שוויון באי-שוויון.

פיתרון:

נשים לב כי מהנתון נקבל:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i \cdot 0 \cdot x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

מתרגיל 3 אנו יודעים כי  $c'_n = inc_n$ .

משוויון פרסבל עבור  $f'$  ועבור  $f$  נקבל:

$$\|f'\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |inc_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \stackrel{c_0=0}{\geq}$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2$$

כנדרש.

נניח כי מתקיים שוויון:

$$\|f'\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \Rightarrow c_n = 0 \forall n \notin \{-1, 1\}$$

לכן, לפי הטענה הנ"ל:

$$\Rightarrow f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}$$

תזכורת: עבור  $f, g$  פונקציות מחזוריות  $2\pi$  נגדיר פונקציה חדשה הנקראת הקונבולוציה המחזורית של

$f$  ו- $g$  ע"י:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t) dt$$

תרגיל 5: הוכח את הלמה של רימן-לבג:

אם  $f$  רציפה למקוטעין ו- $c_n$  מקדמי פורייה של  $f$ , אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{-n} = 0$$

תרגיל 6: יהיו  $f, g$  רציפות למקוטעין ומחזוריות  $2\pi$ , בטא את מקדמי פורייה של  $f * g$  באמצעות מקדמי פורייה של  $f$  ו- $g$

תרגיל 7: הראה כי אין פונקציה רציפה ומחזורית  $f$  המקיימת  $f * g = g$  לכל  $g$  רציפה ומחזורית.  
תרגיל 8: יהיו  $f, g$  רציפות ומחזוריות כך ש-  $f * g = g$ , הראה כי  $g$  פולינום טריגונומטרי.

### Exercise 5

Prove the Riemann-Lebesgue lemma.

Solution:

From Parseval's identity:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

The series converges, therefore the elements  $|c_n|^2$  converge to zero as  $n$  tends to  $\pm\infty$ , and the lemma follows.

### Exercise 6

Let  $f, g$  be piecewise continuous functions with a period of  $2\pi$ . Express the Fourier coefficients of  $f * g$  using the Fourier coefficients of  $f$  and  $g$ .

Solution:

Denote  $\gamma_n, \gamma'_n, \gamma''_n$  the Fourier coefficients of  $f, g, f * g$ , respectively.

$$\begin{aligned} \gamma''_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t) dt e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t) e^{-in(x-t)} e^{-int} dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) e^{-in(x-t)} dx \right) f(t) e^{-int} dt \\ &\stackrel{\tau=x-t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi-t}^{\pi-t} g(\tau) e^{-in\tau} dx \right) f(t) e^{-int} dt \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-in\tau} dx \right) f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma'_n f(t) e^{-int} dt \\ &= \gamma_n \cdot \gamma'_n \end{aligned}$$

### Exercise 7

Show that there is no piecewise continuous function  $f$  with period  $2\pi$  such that  $f * g = g$  for every piecewise continuous with period  $2\pi$   $g$ .

Solution:

Assume such  $f$  exists. Denote  $\chi_m = e^{imx}$ .  $f * \chi_m = \chi_m$  therefore the Fourier coefficients of  $\chi_m$  and  $f * \chi_m$  are the same. Denote the Fourier coefficients

of  $f$  by  $\gamma_n$ .  $\chi_m$  is already given in the form of a Fourier series, therefore the  $m$ 'th coefficient is 1 and the rest are 0. From the previous exercise, the  $m$ 'th coefficient of  $f * \chi_m$  is  $\gamma_m \cdot 1 = 1$ . And we get that the  $m$ 'th Fourier coefficient of  $f$  is 1. Since the choice of  $m$  was arbitrary, we get that  $\gamma_m = 1$  for all  $m \in \mathbb{Z}$ , in contradiction to the Riemann-Lebesgue lemma.

### Exercise 8

Let  $f, g$  be piecewise continuous functions with period  $2\pi$  such that  $f * g = g$ . Prove that  $g$  is a trigonometric polynomial.

Solution:

Denote by  $\gamma_n, \gamma'_n$  the Fourier coefficients of  $f, g$ , respectively. Since  $f * g = g$ , the Fourier coefficients of  $f * g$  and  $g$  are equal. Therefore, from a previous exercise:

$$\gamma_n \cdot \gamma'_n = \gamma'_n$$

for every integer  $n$ , and therefore:

$$\gamma'_n (1 - \gamma_n) = 0.$$

Hence, for every  $n \in \mathbb{Z}$ , either  $\gamma'_n = 0$  or  $\gamma_n = 1$ . From the Riemann-Lebesgue lemma, we know that exists  $M \in \mathbb{N}$  such that for any  $|n| > M$   $|\gamma_n| < 1$ . Therefore, for every  $|n| > M$  we have  $\gamma'_n = 0$  and  $g(x) = \sum_{n=-M}^M \gamma'_n e^{inx}$ , hence  $g$  is a trigonometric polynomial.