אנליזה לחשמל
תרגול מס' 8 – טורי פוריה

משפט דיריכלה: לכל $f \in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ המקיימת את התנאים הבאים:

1. לכל $x \in [-\pi,\pi)$ הגבול הבא קיים וסופי:
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}$$
2. לכל $x \in (-\pi,\pi]$ הגבול הבא קיים וסופי:
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x-)-f(x-h)}{h}$$

כאשר הביטויים $f(x+)$ ו- $f(x-)$ מציינים את הגבולות החד צדדיים של f.

אזי טור פורייה מתכנס לממוצע הגבולות החד צדדיים לכל $x \in (-\pi,\pi)$, בנקודות $x=\pm\pi$, הטור מתכנס ל- $\frac{1}{2}\Big(f(\pi-)+f\big((-\pi)+\big)\Big)$

הגדרה: סכום פוריה ה- n עבור פונקציה f מחזורית 2π עם מקדמי פוריה c_n:
$$s_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}$$
סדרת הממוצעים החשבוניים של s_n (סכומי צ'זרו):
$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_n(x)$$
משפט פייר: תהי f רציפה ומחזורית 2π אזי $\sigma_n(x)\longrightarrow f(x)$ במ"ש על $\mathbb{R}$.

(קיימות פונקציות רציפות ומחזוריות המקיימות כי $s_n(x)\nrightarrow f(x)$ נקודתית ובוודאי שלא במ"ש)

תרגיל 1: יהי V מרחב נורמי ותהי $a_n \in V$ סדרת איברים. נגדיר:
$$b_n=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$$
1. הראו כי אם $a_n\longrightarrow v$ אז גם $b_n\longrightarrow v$.
2. מצאו דוגמא עבור $V=\mathbb{C}$ בה הסידרה b_n מתכנסת ואילו הסידרה a_n איננה מתכנסת.

(תרגיל זה מדגיש את העובדה כי סכומי צ'זרו "משפרים" את ההתכנסות של טור פוריה של f ל- f)

פיתרון:

נניח כי $a_n\longrightarrow a$ ויהי $\epsilon>0$. צריך להוכיח כי קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$:
$$\|b_n-a\|<\epsilon$$
נחשב:
$$\|b_n-a\|=\left\|\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)-a\right\|=\frac{1}{n}\|(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)\|$$

נבחר n_1 כך שלכל $n > n_1$, $\|a_n - a\| < \frac{\epsilon}{2}$.

נבחר $n_0 > n_1$ כך ש- $\frac{1}{n_0}\left\|(a_1 - a) + \cdots + \left(a_{n_1} - a\right)\right\| < \frac{\epsilon}{2}$.

אם כן, לכל $n > n_0$:

$$\|b_n - a\| = \frac{1}{n}\|(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)\| \overset{\text{א"ש המשולש}}{\leq}$$

$$\leq \overbrace{\frac{1}{n}}^{<\frac{1}{n_0}}\left\|(a_1 - a) + \cdots + \left(a_{n_1} - a\right)\right\| + \frac{1}{n}\sum_{i=n_1+1}^{n}\overbrace{\|a_i - a\|}^{<\frac{\epsilon}{2}} <$$

$$< \frac{1}{n_0}\left\|(a_1 - a) + \cdots + \left(a_{n_1} - a\right)\right\| + \frac{1}{n}\sum_{i=n_1+1}^{n}\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{(n - n_1)}{n}\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מש"ל.

נראה דוגמא בה a_n איננה מתכנסת ואילו b_n מתכנסת:

$$a_n = (-1)^n$$

ברור ש- a_n איננה מתכנסת. מאידך:

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k = 0 \longrightarrow 0$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k = -\frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$$

ולכן $b_n \longrightarrow 0$ כנדרש.

<u>תרגיל 2</u>: תהי f רציפה ומחזורית עם מקדמי פוריה c_n. הוכח כי $c_n \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$ (הלמה של רימן- לבג).

<u>פיתרון</u>: הוכחתם את הטענה בהרצאות ע"י אי שוויון בסל (בדוק!).

נביא הוכחה נוספת בהתבסס על משפט פייר.

יהי $\epsilon > 0$ נוכיח כי קיים n_0 כך שלכל $|n| > n_0$:

$$|c_n| < \epsilon$$

מהמסקנה ממשפט פייר הנ"ל, קיים פולינום טריגונומטרי:

$$p(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$$

כך שלכל x:

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

נשים לב כי:

$$\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p(x)e^{-ikx}dx}^{\text{מקדם פוריה ה}-k\text{ של }p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-N}^{N}a_n e^{inx}\right)e^{-ikx}dx =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}a_n\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}e^{-ikx}dx\right) = \sum_{n=-N}^{N}a_n\overbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)x}dx\right)}^{\delta_{nk}} = a_k$$

(המעבר האחרון נובע מכך ש- $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא מערכת אורטוגונלית כפי שהוכח בהרצאות).

אם כן, נבחר $n_0 = N$ ונקבל לכל $|n| > n_0$:

$$|c_n| \overset{\substack{\forall|n|>N \\ a_n=0}}{\cong} |c_n - a_n| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p(x)e^{-inx}dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-p(x)\big)e^{-inx}dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\big(f(x)-p(x)\big)e^{-inx}\right|dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{|f(x)-p(x)|}^{<\epsilon}\,dx < \epsilon$$

כנדרש.

<u>תרגיל 3</u>: תהי f פונקציה רציפה ומחזורית השונה מ- 0 המקיימת כי $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ לכל x, y.
הוכח כי $f(x) = e^{inx}$ לאיזשהו n.

<u>פיתרון</u>:

ראשית נראה כי $f * f = f$.

לכל x:

$$f * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t+t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dt = f(x)$$

נראה כי $f(0) = 1$:

$$f(0) = f(0+0) = f(0)\cdot f(0)$$
$$\Longrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big) = 0$$
$$\Longrightarrow f(0) \in \{0,1\}$$

נניח בשלילה כי $f(0) = 0$, אזי לכל x:

$$f(x) = f(x+0) = f(x)\cdot f(0) = 0$$

בסתירה לנתון!

לכן $f(0) = 1$ כנדרש.

כעת, נסמן את מקדמי פוריה של f ב- a_n ואת מקדמי פוריה של $f*f$ ב- b_n, אזי מכיוון ש- $f*f=f$ נובע כי $a_n=b_n$ לכל n ומהטענה הנ"ל (מקדם פוריה של הקונבולוציה הוא מכפלת מקדמי הפוריה):

$$a_n = b_n = a_n \cdot a_n$$

$$\Longrightarrow a_n(a_n - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall n:\ a_n \in \{0,1\}$$

מהלמה של רימן-לבג, יש N כך ש- $a_n=0$ לכל $|n|>N$ (אחרת, $a_n=1$ לאינסוף n-ים בסתירה לכך ש- $a_n \longrightarrow 0$).

מיחידות מקדמי פוריה, נקבל כי f היא הפולינום הטריגונומטרי:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$$

מכיוון ש- $f(0)=1$ נקבל:

$$1 = f(0) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in0} = \sum_{n=-N}^{N} a_n$$

מכיוון שלכל n, $a_n \in \{0,1\}$ נקבל כי יש n אחד בדיוק עבורו $a_n=1$ ולכן:

$$f(x) = a_n e^{inx} = e^{inx}$$

כנדרש.

<u>תרגיל 4</u>: אומרים כי f מקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע C לכל x,y בתחום של f מתקיים:

$$|f(x)-f(y)| \le C|x-y|$$

הראו כי אם f פונקציה מחזורית עם מקדמי פוריה c_n המקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע C אזי לכל $n\neq 0$ מתקיים:

$$|c_n| \le \frac{C\pi}{2|n|}$$

כלומר מקדמי פוריה של f דועכים מהר לפחות כמו $\frac{1}{n}$ $\left(c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

<u>פיתרון:</u>

<u>טענת עזר</u>: לכל פונקציה רציפה ומחזורית f עם מקדם פוריה c_n מתקיים לכל $n \neq 0$:

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}dx$$

<u>הוכחה:</u>

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \left\{t = x+\frac{\pi}{n}, dt = dx, -\pi-\frac{\pi}{n} \le x \le \pi - \frac{\pi}{n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-in\left(x+\frac{\pi}{n}\right)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}\overbrace{e^{-i\pi}}^{-1}dx =$$

$$= \{\text{אינטגרל על מחזור}\} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)e^{-inx}dx$$

כנדרש.

<u>הוכחת הטענה המרכזית</u>: f מקיימת תנאי ליפשיץ ולכן רציפה (בדוק!).

לכן, מטענת העזר, לכל $n \neq 0$:

$$\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx}^{A} = c_n = \overbrace{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)e^{-inx}dx}^{B}$$

לכן, ניתן לכתוב את c_n ל- $n \neq 0$ כממוצע של שני הביטויים:

$$|c_n| = \left|\frac{A+B}{2}\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)e^{-inx}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\left|e^{-inx}\right|dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|dx \leq$$

$$\overset{\text{ליפשיץ}}{\leq} \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\left|x - \left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|dx = \frac{1}{4\pi}(2\pi C)\cdot\frac{\pi}{|n|} = \frac{C\pi}{2|n|}$$

כנדרש.

<u>שאלה 5</u>:

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ ע"י הנוסחא:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}}\right)e^{inx}$$

חשב את:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$$

<u>פיתרון</u>: הטור הנתון מתכנס בהחלט ובמ"ש לפי מבחן ויירשטראס. מכיוון שנתון שהטור מתכנס נקודתית ל- $f(x)$, הרי שהטור מתכנס ל- f במ"ש. לפי התכנסות במ"ש, ומהאורתוגונליות של המערכת הטריגונומטרית – $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, אם נסמן ב- c_k את מקדם פוריה של f, נקבל:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}}\right)e^{inx}\right)e^{-ikx}dx =$$

$$= \{\text{התכנסות במ"ש}\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}}\right)\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-ikx}dx}^{\delta_{nk}} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2}}, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

כלומר הטור הנתון בשאלה הינו טור פוריה של f. נמצא את $f(x+\pi)$:

$$f(x+\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} \right) e^{in(x+\pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} \right) e^{inx}$$

ומאותו שיקול, הטור האחרון הינו טור פוריה של $f(x+\pi)$.

נסמן $g(x) = f(x+\pi) - f(x)$, ונסמן d_k מקדם פוריה של g, אזי:

$$d_k = \begin{cases} \left((-1)^k - 1\right) \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2}}, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2\sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2}}, & k > 0, \text{אי זוגי } k \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \{\text{פרסבל}\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2 =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |d_{2n-1}|^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left| -2\sqrt{\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}} \right|^2 =$$

$$= 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = 8\pi \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \cdots \right) \overset{\text{טלסקופי}}{=} \boxed{8\pi}$$

<u>שאלה 6</u>: הוכח כי:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^x \frac{se^{s^2} ds}{\sqrt{s^2 + 2011}} \right) e^{inx} dx = 0$$

<u>פיתרון</u>: נסמן:

$$f(x) = \int_0^x \frac{se^{s^2} ds}{\sqrt{s^2 + 2011}}$$

מכיוון שהפונקציה - $g(s) \coloneqq \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2+2011}}$ היא פונקציה רציפה, נקבל מהמשפט היסודי של החדו"א כי f גזירה על $\mathbb{R}$. נתבונן בקטע $[-\pi, \pi]$. f גזירה בקטע ו- $f(\pi) = f(-\pi)$ שכן g אי זוגית ולכן f זוגית כאינטגרל של פונקציה אי זוגית.

הסבר אלטרנטיבי:

$$f(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{se^{s^2} ds}{\sqrt{s^2 + 2011}} = \{t = -s\} = \int_0^{-\pi} \frac{-te^{t^2}(-dt)}{\sqrt{t^2 + 2011}} = \int_0^{-\pi} \frac{te^{t^2} dt}{\sqrt{t^2 + 2011}} = f(-\pi)$$

לכן, אם נגדיר $h(x)$ להיות ההמשכה המחזורית 2π של $f(x)$ המוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ אזי $h(x)$ גזירה ברציפות ומחזורית 2π. נסמן c_n מקדם פוריה של h ו- c_n' - מקדם פוריה של h', אזי (לפי משפט שהוכח בהרצאות), $c_n' = inc_n$. מהלמה של רימן לבג, $c_n' \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$.

לכן:

$$n\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^x \frac{se^{s^2}ds}{\sqrt{s^2+2011}}\right)e^{inx}dx = n\int_{-\pi}^{\pi}h(x)e^{-i(-n)x}dx =$$

$$= 2\pi n\overbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)e^{-i(-n)x}dx\right)}^{c_{-n}} = \frac{2\pi}{i}(inc_{-n}) = \frac{2\pi}{i}c_{-n}' \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כנדרש.