שאלה מס' (30)

בשאלה 2' ניתנת לנו שיטה אשר בה הקירוב בצעד הבא מחושב מתוך הקירוב שנמצא בשלושת הצעדים הקודמים לו.
אם כך, נתון כי השגיאה בצעד הבא תלויה בצעדים הקודמים באופן הבא: $e_{n+3} \approx K\cdot e_{n+2}\cdot e_{n+1}\cdot e_n$

נרצה למצוא מהו סדר ההתכנסות של השיטה הנ"ל.
כיוון שהשגיאה נתונה כנוסחאת נסיגה, נרצה למצוא ביטוי מפורש עבור השגיאה, ואז למצוא את היחס בין שתי שגיאות עוקבות.
לכן, יש לפתור את נוסחאת הנסיגה. כיוון שקל יותר לפתור נוסחאות נסיגה ליניאריות, נפעיל log על שני האגפים ונפתור את הנוסחא:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 2A_{n-3} + \log(K)$$

כאשר $A_n = \log(e_n)$

זוהי נוסחאת נסיגה ליניארית לא הומוגנית, כיוון שישנה התוספת $\log(K)$. פתרון נוסחאת נסיגה לא הומוגנית מורכב ממחובר שצורתו כצורת הפתרון של הנוסחא ההומוגנית (ללא הקבוע $\log(K)$) וממחובר שצורתו כצורת המרכיב הלא הומוגני, במקרה שלנו, מחובר זה יהיה קבוע כיוון שהתוספת הינה קבועה.
אם כן, פתרון החלק ההומוגני הינו מהצורה:

$$a_n = \alpha\cdot\lambda^n + \beta\eta^n + \gamma\nu^n$$

כאשר λ, η, ν הינם שורשי הפולינום האופייני של החלק ההומוגני הנוסחאת הנסיגה: $t^3 - t^2 - t - 2 = 0$

$$\Rightarrow t^3 - 1 - 1(t^2+t+1) = (t-1)(t^2+t+1) - 1(t^2+t+1)$$
$$= (t-2)(t^2+t+1) = 0$$

מכאן שהשורש הממשי היחיד של הפולינום האופייני הוא $\lambda = 2$.
על כן, הפתרון ההומוגני הוא מהצורה $a_n = \alpha\cdot 2^n$, α קבוע כלשהו, והתוספת הלא הומוגנית הינה קבוע כלשהו C.

לכן, הפתרון הכללי הינו $a_n = \alpha\cdot 2^n + C$

והביטוי המקורי עבור השגיאה הינו: $e_n = 2^{\alpha\cdot 2^n + C}$

כלומר ביטוי מהצורה $e_n = \beta\cdot\alpha^{2^n}$, β,α קבועים כלשהם.

זוהי שגיאה שסדר ההתכנסות שלה הינו ריבועי:

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} = \frac{\beta\cdot\alpha^{2^{n+1}}}{\beta^2\cdot\alpha^{2^n\cdot 2}} = \frac{1}{\beta} = const$$

שאלה מס' 26:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

הנקודה x עוברת, עבור $x \neq 0$, לנקודה $x - \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -x$ עבור $0<x$,

לנקודה $x - \frac{-\sqrt{-x}}{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(-1)} = -x$ עבור $x<0$.

לכן, בכל מקרה מקבלים מסלול מחזורי. אין סביבה של השורש היחיד 0 שעבורה שיטת ניוטון מתכנסת. הדבר אינו מפתיע כי f אינה גזירה ב-0.