שאלה מס' 40:

(א) יש למצוא חסם תחתון במונחים של λ עבור $\|A\|$:

נזכיר:
$$\|A\| = \frac{\|AV\|}{\|V\|} \quad \text{לכל } V\in\mathbb{R}^n$$

לכן:
$$|\lambda_i| = \frac{\|\lambda_i v_i\|}{\|v_i\|} = \frac{\|Av_i\|}{\|v_i\|} \le \|A\|$$
v_i וקטור עצמי של הוקטור v_i — v_i וקטור

ולפיכך $|\lambda_{max}| \le \|A\|$

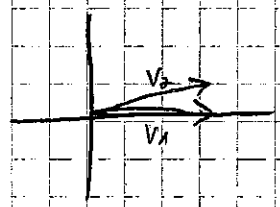
(ב) יש להראות כי לא ניתן למצוא חסם עליון עבור $\|A\|$ במונחים של λ:

הרעיון הוא למצוא עוד מטריצה קיים וקטור V כך שהביטוי $\frac{\|AV\|}{\|V\|}$ גדול כרצוננו.

נתבונן למשל, במטריצה A אשר לה שני וקטורים עצמיים v_1, v_2 קרובים מאוד אחד לשני ועם $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$.

בדוגמא מסתברת לכן יכולה להיות המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{\varepsilon}{2}\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad V_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad V_2=\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$



$$AV_1 = V_1, \quad AV_2 = -V_2$$

כידוע, כל הביטויים של הסוג $f(1,-1)$, הינו ביטוי פיסי לקבוע שאינו תלוי ב ε, אולם נראה שניתן להגדיל את $\frac{\|AV\|}{\|V\|}$ בעזרת ב ε עד הפיצול הבא:

נסתכל על הוקטור $V = V_1 - V_2$

$$\frac{\|AV\|}{\|V\|} = \frac{\|AV_1 - AV_2\|}{\|V_1 - V_2\|} = \frac{\|V_1 + V_2\|}{\|V_1 - V_2\|} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$$

בזאת עבור כל ביטוי $f(1,-1)$ נבל למצוא ε כזה בזאת שני חסם קרובים מספיק אחד לשני, כך $\frac{\|AV\|}{\|V\|} > f(1,-1)$.