שאלה: נתונה הפונקציה $f(x)=2^x-2x$. מצא עבור אילו נקודות התחלה שיטת ניוטון מובטחת להתכנסות עבור כל אחד מהשורשים.

פתרון:

ראשית, נשים לב כי $x_1=1$ ו- $x_2=2$ הינם שורשים של f.

נראה שהם שורשים יחידים: $f'(x)=2^x\ln(2)-2$

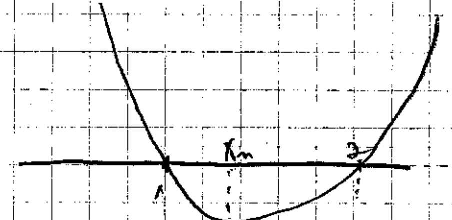
f' מתאפסת בנקודה אחת בלבד: $f'(x)=0$

$$\Rightarrow x=\log_2\left(\frac{2}{\ln(2)}\right)=1-\log_2(\ln(2))$$

נקרא לנקודה הנ"ל x_m.

כמו כן נשים לב כי: $f''(x)=2^x\ln^2(2)>0 \ , x\in\mathbb{R}$

ומכאן ניתן להסיק כי x_m הינה נקודת מינימום וכי f קמורה כלפי מעלה בכל נקודה.



על כן, x_1,x_2 הינם שורשים יחידים וניתן לשרטט את f באופן הבא:

כעת נבחן מאילו נקודות ? f שיטה התכנסות לאיזה שורש. כיוון שהפונקציה קמורה כלפי מעלה על כל הישר בפרט בתחום $[1,2]$ אזי אם נתחיל את שיטת ניוטון מנקודה $1<x_0<a$ $x_1<1$ ואם $a<x_0<2$ אזי $x_1>2$. לכן ניתן לראות כי מתחילים מנקודה מחוץ לקטע $[1,2]$.

טענה: עבור כל נקודה התחלה בתחום $(\underbrace{-\infty}_{a},\underbrace{x_1+\varepsilon}_{b})$ שיטת ניוטון מתכנסת לשורש $x_1=1$.

הוכחה: ניתן להוכיח באופן ישיר או ממשפט ההתכנסות הגלובלית של שיטת ניוטון:

(א) $f(-\infty), f(x_1+\varepsilon)$ שוני סימן. (ב) f' אינה מתאפסת בקטע (ג) $f''(x)>0$.

נותר רק להוכיח כי בקצוות מתקיים: $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|<b-a$, $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|<b-a$

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|=\left|\frac{2^a-2a}{2^a\ln(2)-2}\right|_{a\to-\infty}\Rightarrow\left|\frac{-2a}{-2}\right|=|a|<1-a$$

$$\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|=\left|\frac{2^b-2b}{2^b(\ln(2))-2}\right|_{b\to x_1=1}\to\frac{0}{const}<\underset{a\to-\infty}{1-a}$$

בדיוק באותו האופן ניתן להראות כי אם מתחילים מנקודה כלשהי מימין ל 2

מקבלים התכנסות ל- $x_2=2$.

לסיכום, אם מתחילים מנקודה כלשהי משמאל ל-a אז מתכנסים ל-1 ואם מתחילים מנקודה מימין ל-a מתכנסים ל-2.

כמו כן, כיוון ש- $f'(x_1)\neq 0$ ו- $f'(x_2)\neq 0$, כלומר השורשים אינם שורשים מרובים, אזי ההתכנסות של שיטת ניוטון היא התכנסות ריבועית.