פתרונות תרגיל 3 בהסתברות

1. יהי $\mathcal{F}$ שדה מאולתר של Ω. הוכח כי עבור $\{B_i\}\subset\mathcal{F}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\in\mathcal{F}$.

הוכחה: מההגדרה, $B_i\in\mathcal{F} \Rightarrow A_i=\overline{B_i}$ גם ב-$\mathcal{F}$.
מההגדרה, $\{A_i\}\subset\mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{F}$. אבל

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{B_i} = \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)}$$

לכן שוב מההגדרה, גם המשלים ב-$\mathcal{F}$, כלומר $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\in\mathcal{F}$.

2. הוכח כי אם $\mathcal{F}$ אוסף קבוצות חלקיות של Ω המקיים:
1. $\phi\in\mathcal{F}$. 2. $A\in\mathcal{F} \Rightarrow \overline{A}\in\mathcal{F}$.
3. לכל סדרה $\{B_i\}\subset\mathcal{F}$ גם $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\in\mathcal{F}$,

אזי $\mathcal{F}$ שדה מאולתר.

הוכחה: צריך להוכיח רק כי אם $\{A_i\}\subset\mathcal{F}$, אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{F}$, כי יתר התנאים בהגדרת שדה מאולתר מתקיימים.
עבור $A_i\in\mathcal{F}$, $B_i=\overline{A_i}\in\mathcal{F}$ מתנאי 2. לפי תנאי 3, $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\in\mathcal{F}$. אבל $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}=\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}$.
לכן לפי תנאי 2, גם המשלים $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ שייך ל-$\mathcal{F}$.

3. תהי $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ משפחת שדות מאולתרים של Ω. הוכח כי $\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ שדה מאולתר.

הוכחה: נסמן $\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}$. נוכיח את התכונות המגדירות שדה מאולתר מתוך שימוש בכך שלכל $\mathcal{F}_\alpha$ התכונות הדרושות:

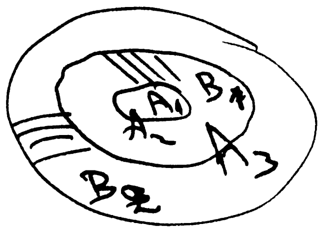
א. $\phi\in\mathcal{F}_\alpha$ לכל α, ולכן $\phi\in\bigcap_\alpha\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}$.

ב. נניח $A\in\mathcal{F}$, כלומר $A\in\mathcal{F}_\alpha$ לכל α. לכן $\overline{A}\in\mathcal{F}_\alpha$ לכל α, ו-$\overline{A}\in\mathcal{F}$.

ג. תהי $\{A_i\}\subset\mathcal{F}$. אזי $\{A_i\}\subset\mathcal{F}_\alpha$ לכל α, ולכן $\bigcup A_i\in\mathcal{F}_\alpha$ לכל α, כלומר $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\bigcap\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}$.

4. P הסתברות על שדה מאורעות F.

א. הוכח כי אם $\{A_n\}$ סדרה עולה של מאורעות, אזי $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\lim_n P(A_n)$.



הוכחה: נשרטט עיגולים עולים, להסביר את הרעיון.

נגדיר $B_0=A_1$, ועבור $1\le n$ נגדיר $B_n=A_{n+1}-A_n$

(השרטוט הוא על $\{B_n\}$ כאשר הטבעות המתאימות הן $\{A_n\}$).

$B_n=A_{n+1}\cap\overline{A}_n$ לפי ההגדרה, ולכן $B_n\in F$. המאורעות $\{B_n\}$ זרים: אם $x\in B_n$, אזי $x\in A_{n+1}$, ולכן עבור כל $j>n$ $x\in A_j$. לכן $x\notin B_j$ כי $B_j\subset\overline{A}_j$. מכאן ש-$\{B_n\}$ זרים.

לכן, בהגדרת הסתברות,

$$P(\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j)=\sum_{j=0}^{\infty} P(B_j)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} P(B_j)$$

אבל לכל $j\geq 1$, $P(B_j)=P(A_{j+1})-P(A_j)$ כי $A_j\subset A_{j+1}$

[$P(A_{j+1})=P(A_j)+P(B_j)$ מהגדרת ההסתברות].

כלומר, $\sum_{j=0}^{n-1}P(B_j)=P(B_0)+\sum_{j=1}^{n-1}[P(A_{j+1})-P(A_j)]=P(A_n)$

$P(\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j)=\lim_n P(A_n)$. אולם (הוכח שאלה הקודמת) $\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

ב. הוכח כי אם E_n סדרה יורדת של מאורעות, אזי $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)=\lim_{n\to\infty} P(E_n)$.

הוכחה: לכל n, $A_n:=\overline{E}_n$ מאורע. $E_{n+1}\subset E_n \Leftarrow$

$A_{n+1}=\overline{E}_{n+1}\supset\overline{E}_n=A_n$, ולכן $\{A_n\}$ סדרה עולה. משאלה סעיף א' [illegible]

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n=\overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)}\Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)=1-P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=$$

$$1-\lim_{n\to\infty} P(A_n)=\lim_{n\to\infty}[1-P(A_n)]=\lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n)=\lim_n P(E_n).$$

5. יהי F שדה מאורעות על Ω, ותהי P פונקציה על F המקיימת:

1. $0\le P(A)\le 1$ לכל $A\in F$, $P(\Omega)=1$.
2. $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$ לכל $A_1,A_2\in F$ זרות
3. לכל סדרה עולה $\{B_n\}$ של מאורעות, $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)=\lim_n P(B_n)$.

אזי P פונקציית הסתברות.

הוכחה: א. לכל $A_1,\dots,A_k$ זרות ב-F, תנאי 2':
$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)=\sum_{i=1}^{k} P(A_i)$; עבור $k=2$ זה נתון באקסיומה.
נניח שתנאי 2' נכון עבור $k=n$, אזי עבור $k=n+1$ נקבל

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i=\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]\cup A_{n+1}$$

וזהו איחוד שני מאורעות זרים, ולפי תנאי 2 והנחת האינדוקציה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)+P(A_{n+1})=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+P(A_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$

ולכן הטענה נכונה לכל k טבעי ($k=1$ טריוויאלי).

ב. כדי להוכיח ש-P פונקציית הסתברות, צריך להראות שלכל סדרה אינסופית $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ של מאורעות זרים,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

נגדיר $B_n=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. אזי $\{B_n\}$ סדרה עולה של מאורעות (כל B_n מאורע כי F שדה מאורעות). קל לבדוק כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. מתנאי א', $P(B_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

מתנאי 3,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\lim_{n\to\infty} P(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

6. במקום תנאי 3 מניחים את התנאי
4. לכל סדרת מאורעות יורדת $\{E_n\}$, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)=\lim_n P(E_n)$.

מוכיחים מתנאי 4 את תנאי 3 ע"י שימוש במעבר למשלים, כמו בתרגיל 2. (אם $\{B_n\}$ עולה, $\{\overline{B_n}\}$ יורדת).