תירגול 10

שונות משותפת
מקדם מתאם

- השונות המשותפת מספקת מידע על הקשר בין שני משתנים מקר"ם

$$cov(x,y)=E[x\cdot y]-E[x]\cdot E[y]$$

- מקדם המתאם

$$\rho(x,y)=\frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)}\cdot\sqrt{V(y)}}$$

מודד עד כמה המשתנים המקריים X,Y תלויים זה בזה.

שאלות

1. נתונה פונקציית ההסתברות של מ"מ X:

x	-1	0	1
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

נגדיר מ"מ $y=1-x^2$

חשב $cov(x,y)$

$$cov(x,y)=E[x\cdot y]-E[x]\cdot E[y]$$

$$E[x]=-1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}=0$$

$$E[x\cdot y]=E[x\cdot(1-x^2)]=E[x]-E[x^3]=0$$

$$cov(x,y)=0$$

לכן

X,Y תלויים, $cov(x,y)=0$

לכן מ- $cov(x,y)=0$ לא נובע ש- X,Y בלתי תלויים.

אם X,Y בלתי תלויים אז $cov(x,y)=0$.

ההפך לא נכון.

2. מטילים קוביה הוגנת פעמים. נסמן ב- X מספר פעמים עד שמקבלים "1" בפעם

השלישי, Y - מספר פעמים עד שמקבלים "1" בפעם השניה. מצא $cov(X,Y)$.

<u>פתרון</u>: נשים לב כי $X-Y\sim G(\frac{1}{6})$

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2cov(X,Y)$$

$$cov(X,Y)=\frac{V(X)+V(Y)-V(X-Y)}{2}$$

$$V(X-Y)=\frac{1-p}{p^2}=30.$$

$$X=X_1+X_2+X_3$$
$$Y=X_1+X_2$$

X_1 - מס' הטלות עד לקבלת מס' 1 בפעם הראשונה

X_2 - מס' הטלות (אחרי שקיבלנו 1 בפעם ראשונה) עד לקבלת מס' 1 בפעם השניה

$X_i\sim G(\frac{1}{6})$ X_1,X_2,X_3 בלתי תלויים.

$$V(X)=V(X_1+X_2+X_3)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=$$
$$=3\cdot\frac{1-\frac{1}{6}}{(\frac{1}{6})^2}=90$$

$$V(Y)=2\cdot\frac{1-\frac{1}{6}}{(\frac{1}{6})^2}=60$$

$$cov(X,Y)=60$$

(3) נניח כי $X_1,X_2,\dots,X_m\sim U[[1,n]]$ מ"מים בדידים בלתי תלויים. נסמן ב

$$Y=\min_{1\le i\le m}X_i$$
$$Z=\max_{1\le i\le m}X_i$$

(א) מצא פונקצית ההסתברות של Y

(ב) הראה שההתפלגות הגבולית של Y כאשר $m=n\to\infty$ הינה גיאומטרית

(ג). מצא פונקצית ההסתברות של Z

(ד). הוכח כי

$$P_{Y,Z}(k,l)\le\left(\frac{l-k+1}{n}\right)^m$$

<u>פתרון:</u>

(א).

$$P(Y=k)=?$$

$$k=1,\dots,n$$

$$F_Y(t)=P(Y\le t)=P(\min\{X_1,X_2,\dots,X_m\}\le t)=$$

$$=1-P(\min\{X_1,\dots,X_m\}>t)=1-[P(X_1>t)]^m=$$

$$=1-[1-P(X_1\le t)]^m=1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^m$$

$$P(Y\le k)=P(Y<k)+P(Y=k)$$

$$P(Y=k)=P(Y\le k)-P(Y\le k-1)=$$

$$=\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^m-\left(1-\frac{k}{n}\right)^m$$

(ב). $m=n\to\infty$

$$P(Y=k)\to e^{-(k-1)}-e^{-k}=(e^{-1})^{k-1}(1-e^{-1})$$

$$k=1,2,\dots,n$$

$$Y\underset{m=n\to\infty}{\sim}G(1-e^{-1})$$

(ג)

$$P(Z\le l)=P(\max\{X_1,\dots,X_m\}\le l)=$$

$$=[P(X_1\le l)]^m=\left(\frac{l}{n}\right)^m$$

$$P(Z=l)=\left(\frac{l}{n}\right)^m-\left(\frac{l-1}{n}\right)^m\qquad l=1,2,\dots,n$$

(3)

$$P(Y=k, Z=l) = P(\min\{X_1,\dots,X_m\}=k,\ \max\{X_1,\dots,X_m\}=l)$$

$$\{Y=k \cap Z=l\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{m}\{k \leq X_i \leq l\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{m}\{k \leq X_i \leq l\} \not\subseteq \{Y=k, Z=l\}$$

לכן

$$P(Y=k, Z=l) \leq P(k \leq X_1 \leq l \cap k \leq X_2 \leq l \cap \dots \cap k \leq X_m \leq l) =$$

$$= [P(k \leq X_1 \leq l)]^m = \left(\frac{l-k+1}{n}\right)^m \quad 1 \leq k \leq l \leq n$$

4) $X_1, X_2, \dots, X_n \sim exp(\lambda)$ מ"מ בלתי תלויים

הוכח כי מ"מ $\min\{X_1,\dots,X_n\}$ מפולג מעריכית

פתרון

$$F_{min}(t) = 1 - P(\min\{X_1,\dots,X_n\} \geq t) =$$

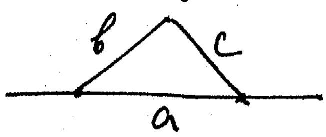
$$= 1 - [P(X_1 \geq t)]^n = 1-(1-F_{X_1}(t))^n, \quad t \geq 0$$

בגלל שוה

$$f_{min}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ n\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda n t} & t \geq 0 \end{cases}$$

לכן $\min \sim exp(\lambda \cdot n)$

5) מכשיר מכיל 3 מוליכים בעלי אורך חיים מעריכי עם פרמטר λ. נסמן את אורך חיי המכשיר ב-X, ואורך חיי בלוק C ב-Y. מצא $P(X>2 | Y>1)$.



פתרון:

$P(X>2 | Y>1)$ - ?

נסמן ב- a אורך חיים של בלוק a

b אורך חיים של בלוק b

c אורך חיים של בלוק c

$$X = \max\{a, \min\{b,c\}\}$$

כאשר $a \sim exp(\lambda)$

$b \sim exp(\lambda)$

$c \sim exp(\lambda)$

$$P(X>2 \mid y>1) = P(X>2 \mid c>1) =$$

$$= P(a>2 \mid c>1) + P(b>2 \mid c>1)\cdot P(c>2 \mid c>1) -$$

$$- P(a>2 \mid c>1)\cdot P(b>2 \mid c>1)\cdot P(c>2 \mid c>1) =$$

$$= P(a>2) + P(b>2)\cdot P(c>1) -$$

a, b ב״ת

b, c ב״ת

תכונת חוסר זכרון

$$- P(a>2)\cdot P(b>2)\cdot P(c>1) =$$

$$= e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda}\cdot e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}\cdot e^{-2\lambda}\cdot e^{-\lambda}$$

תכונת חוסר זכרון: $C \sim exp(\lambda)$

אז

$$P(C > t_1+t_2 \mid C > t_1) = P(C > t_2)$$

נושא חדש **סכום משתנים מקריים בלתי תלויים**

- X, Y משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ פונקציות צפיפות שלהם בהתאמה אז פונקציה הצפיפות f_{X+Y} נקראת הקונבולוציה של הפונקציות f_X ו- f_Y וניתנת ע״י נוסחה

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-y)\, f_Y(y)\, dy$$

שאלות:

1. X, Y מ"מ אחידים רציפים בקטע $[0,1]$ בלתי תלויים

$X \sim U(0,1)$

$Y \sim U(0,1)$

מצא $f_{X+Y}(t)$.

פתרון:

$$f_{X+Y}(t) = \int_0^1 f_X(t-y)\cdot 1\, dy \,, \quad 0\le t\le 2$$

$$0 \le t-y \le 1$$

$$t-1 \le y \le t$$

עבור $0\le t\le 1$

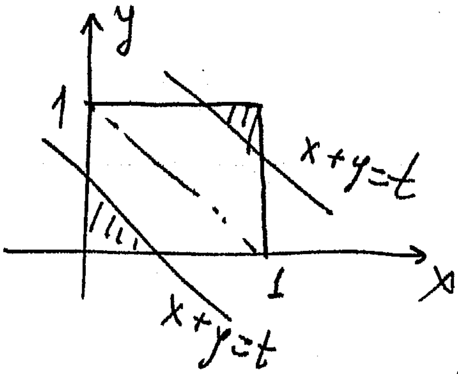
$$f_{X+Y}(t) = \int_0^t dy = t$$

עבור $1\le t\le 2$

$$f_{X+Y}(t) = \int_{t-1}^1 dy = 2-t$$

$$f_{X+Y}(t) = 0$$ אחרת

פתרון שני



$(X,Y) \sim U(0,1)^2$

עבור $0\le t<1$

$$P(X+Y\le t) = \frac{t^2}{2}$$

עבור $1\le t<2$

$$P(X+Y\le t) = 1 - P(X+Y>t) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2}$$

לכן

$$f_{x+y}(t) = F'_{x+y}(t) = \begin{cases} \frac{2t}{2} & 0<t<1 \\ \frac{2\cdot(2-t)}{2} & 1\le t\le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(2) $X \sim exp(\lambda)$, $y \sim exp(\lambda)$, X, Y בלתי תלויים.

$f_{x+y}(t)$ - ?

פתרון:

$$f_{x+y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t-y)\cdot f_y(y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f_x(t-y)\cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y}\,dy =$$

$$= \int_{0}^{t} \lambda^2 \cdot e^{-\lambda(t-y)} \cdot e^{-\lambda y}\,dy =$$

$$= \lambda^2 \int_{0}^{t} e^{-\lambda t + \lambda y - \lambda y}\,dy = t\cdot\lambda^2\cdot e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$

$$f_{x+y}(t) = \begin{cases} \lambda^2\cdot t\cdot e^{-\lambda t} & t\ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$