תירגול 11

אינטגרל כפול

תכונות של אינטגרל כפול

1. $\iint\limits_D dxdy = S(D)$, כאשר $f(x,y)=1$

2. $c\cdot\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D c\cdot f(x,y)dxdy$

3. $\iint\limits_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

4. אם $D=D_1\cup D_2$ ו- $D_1\cap D_2=\emptyset$ אז

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

5. אם $f(x,y)\geq 0$ אז

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

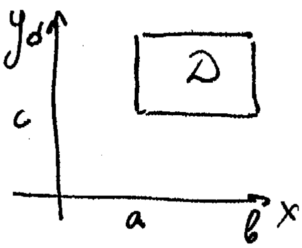
6. אם $m\leq f(x,y)\leq M$ בתחום D

אזי $m\cdot S(D)\leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M\cdot S(D)$

7. $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

אופן החישוב של אינטגרל כפול

תלוי בצורת התחום D של האינטגרציה.

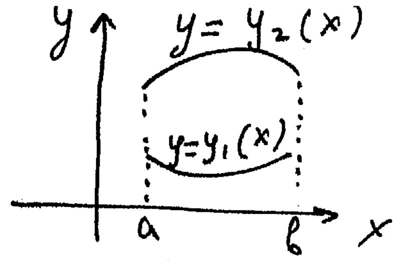


$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad (1)$$

$$I=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy =$$

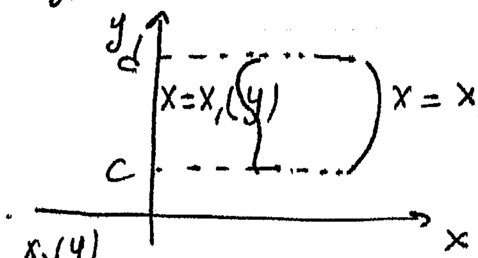
$$=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

(2)



$$I=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(3)



$$I=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

דוגמאות

① חשב $\iint_D (x^2-y)\,dxdy$ כאשר D הוא

מלבן $D=\{0\le x\le 3,\ 0\le y\le 4\}$

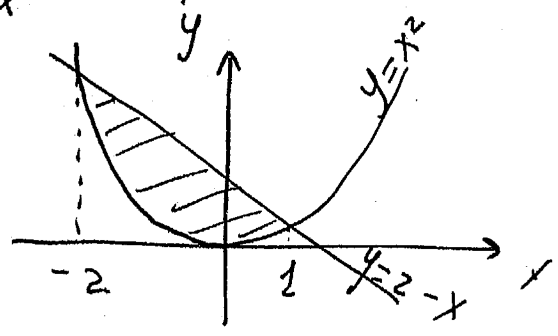
פתרון $\iint_D (x^2-y)\,dxdy=\int_0^3\int_0^4 (x^2-y)\,dydx=$

$$=\int_0^3 (4x^2-8)\,dx=12$$

$$\int_0^4\int_0^3 (x^2-y)\,d\cancel{y}x\,dy=12$$

② חשב $\iint_D y\,dxdy$ כאשר D הוא

התחום החסום ע"י הקווים $y=x^2$, $y=2-x$



פתרון

$$I=\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} y\,dy\,dx=\int_{-2}^{1}\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=2-x}dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(\frac{(2-x)^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx=7.2$$

או

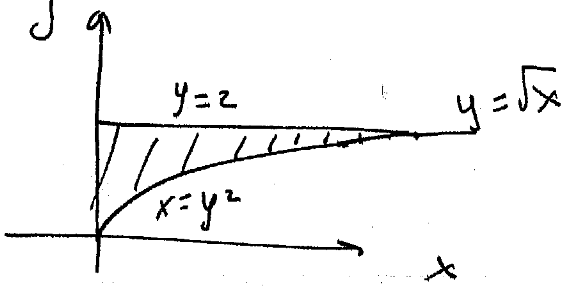
$$I=\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy+\int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} y\,dx\,dy=$$

$$=\int_{0}^{1}2y\sqrt{y}\,dy+\int_{1}^{4}y\cdot(2-y+\sqrt{y})\,dy=7.2$$

3. חשב

$$\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}e^{x/y}\,dy\,dx$$

כאן אינטגרל הפנימי לפי y אינו ניתן לחישוב בפונקציות אלמנטריות. לכן ננסה לשנות את סדר האינטגרציה



$$\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}e^{x/y}\,dy\,dx=\int_{0}^{2}\int_{0}^{y^2}e^{x/y}\,dx\,dy=$$

$$=\int_{0}^{2}\left(ye^{x/y}\right)\Big|_{x=0}^{x=y^2}dy=\int_{0}^{2}\left(y\cdot e^{y}-y\right)dy=$$

$$=\left(ye^{y}-y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}\approx 6.4$$

(4) האם האינטגרל $\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\,dy$ מתכנס

<u>פתרון:</u> נשתמש במשפט פוביני.

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} + \int \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \left\{ \begin{array}{ll} u=y & du=dy \\ dv=\frac{-2y\,dy}{(x^2+y^2)^2} & v=\frac{1}{x^2+y^2} \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

לכן $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

נשים לב כי

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = -\frac{\pi}{4}$$

לכן לפי משפט פוביני $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$

אינו מתכנס בהחלט, כלומר

$\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| dx\,dy$ מתבדר

פונקציה צפיפות משותפת

• אומרים של-X ו-Y יש התפלגות משותפת רציפה, אם קיימת פונקציה אי-שלילית $f(x,y)$ המוגדרת לכל x ו-y, ועם התכונה, שלכל קבוצה C של זוגות מספרים ממשיים (C קבוצה במישור דו-ממדי) מתקיים

$$P((X,Y)\in C)=\iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$$

הפונקציה $f(x,y)$ נקראת פונקצית צפיפות המשותפת של X ו-Y.

• פונקציות צפיפות שוליות

של X: $$f_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv$$

של Y: $$f_Y(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du$$

שאלות

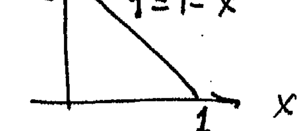
(1) נתונה פונקצית הצפיפות המשותפת

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} C & 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<x+y<1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(א). מצא את C

(ב) מצא את פונקציות הצפיפות השוליות

(ג) $E[X]$, $V[X]$



פתרון:

(א).

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=C\cdot S(D)=C\cdot 2$$

$$\boxed{C=\frac{1}{2}}$$

(ב).

$$f_X(x)=\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\,dy=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^{1-y}\frac{1}{2}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$E[X]=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(1-x)\,dx=\frac{1}{3}$$

$$V[X]=\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{2}(1-x)\,dx-\frac{1}{9}=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

2. נתונה פונקצית צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y) & 0<x<2,\ 0<y<4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מצא את $P(X\le 1\,/\,Y<3)$

$$P(X\le 1/Y<3)=\frac{P(X\le 1,\,Y<3)}{P(Y<3)}=$$

$$=\frac{\int_0^1\left(\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy\right)dx}{\int_0^2\left(\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy\right)dx}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{5}$$

3. יהיו X,Y מ"מ בעלי צפיפות משותפת

$$f(x,y)=\begin{cases}C & x^2+y^2\le R^2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

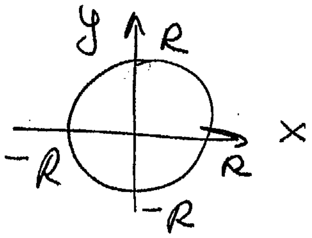
מצא את

(א) את הקבוע C

(ב) את פונקציות השוליות

(ג) את פונק' ההתפלגות של מרחק ה מהנק' מקרית (X,Y) לראשית

פתרון



$$c = \frac{1}{S(D)} = \frac{1}{\pi R^2}$$

ב).

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2} & -R < x < R \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2} & |y| < R \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ג).

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F_D(t) = P(\sqrt{x^2+y^2} \le t) = P(x^2+y^2 \le t^2) =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le t^2} \frac{1}{\pi R^2}\,dx\,dy = \frac{t^2}{R^2} \qquad 0 < t < R$$

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2/R^2 & 0 < t < R \\ 1 & t \ge R \end{cases}$$

(4) מצרק

במפעל יש שתי מכונות המייצרות נורות חשמל. מכונה א' מייצרת 30% ומכונה ב' מייצרת 70% מהתוצרת המפעל. ההסתברות לייצור נורה פגומה היא 0.1 עבור מכונה א' ו-0.15 עבור מכונה ב'. אורך החיים (בשנים) של נורה תקינה מפולג מעריכית עם פרמטר 0.8 עבור תוצרת של מכונה א' ו-0.5 עבור תוצרת של מכונה ב'

(א). נבחר נורה אחת באופן מקרי. נסמן ב-X את אורך חי"ה (אם הנורה פגומה אז $X=0$). מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ X.

(ב). מהי ההסתברות שנורה מתוצרת מכונה א' תעבוד יותר משנה אחת, אם ידוע כי היא עבדה כבר במשך חצי שנה.

(ג). נבחר 200 נורות מתוצרת המפעל. מצא את ההסתברות שבתוכן יש לכל היותר 25 נורות פגומות (השתמש בקירוב נורמלי)

<u>פתרון</u>: (א). Y - אורך החי"ק של נורה ממכונה א'.

Z - אורך החי"ק של נורה ממכונה ב'.

E - נורה ממכונה א' פגומה

H - נורה ממכונה ב' פגומה.

A - נורה הנבחרת באופן מקרי היא ממכונה א'

$$F_X(t) = P(X\le t) = P(X\le t|A)\cdot P(A) + P(X\le t|\bar{A})\cdot P(\bar{A})$$

$$P(X\le t|A) = P(Y\le t) = P(Y\le t|E)\cdot P(E) + P(Y\le t|\bar{E})\cdot P(\bar{E}) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-0.9e^{-0.8t} & t\ge 0 \end{cases}$$

$$P(X\le t|\bar{A}) = P(Z\le t) = P(Z\le t|H)\cdot P(H) + P(Z\le t|\bar{H})\cdot P(\bar{H}) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-0.85\cdot e^{-0.5} & t\ge 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1-0.27\cdot e^{-0.8t}-0.595\, e^{-0.5t} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

(ב)

$$P(Y>1|Y>\tfrac{1}{2}) = \frac{P(Y>1, Y>\frac{1}{2})}{P(Y>\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{P(y>1)}{P(y>\frac{1}{2})} = \frac{0.9 \cdot e^{-0.8}}{0.9 \cdot e^{-0.4}} = e^{-0.4}$$

(ד). נסמן ב- S מספר הנורות הפגומות בתוך 200 נורות שנבחרו.

$$S \sim B(200, p)$$

$$p = P(X=0) = 1-0.27-0.595 = 0.135$$

$$P(S \le 25) = P\left(\frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{25-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(-0.41385) \approx 0.34$$