תירגול 12

משתנה מקרי דו-ממדי

רציף

- $$P((X,Y)\in C)=\iint_C f(x,y)\,dx\,dy$$

כאשר $f(x,y)$ פונקצית צפיפות משותפת

- $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$$

- פונקציות שוליות

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

- פונקצית ההתפלגות המשותפת

$$F_{X,Y}(t,s)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f(x,y)\,dy\,dx$$

- $$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$$

שאלות:

(1) נתונה פונקצית הצפיפות המשותפת

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<y\le x\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מצא

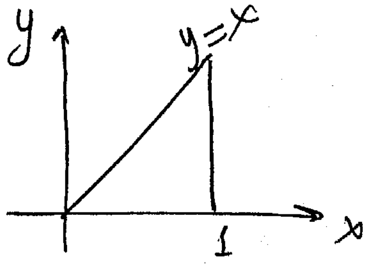
(א) את פונקצית ההתפלגות המשותפת.

(ב) את פונקציות הצפיפות השוליות.

(ג) האם X,Y בלתי תלויים?

(ד) את $Cov(X,Y)$, $V(X+Y)$

פתרון



$$F_{x,y}(s,t)=P(x\le s,\ y\le t)=\begin{cases}0 & s<0 \text{ או } t<0\\ s & 0<s<1,\ s<t,\ t>0\\ t+t\cdot\ln\frac{s}{t} & 0<s<1,\ 0<t<1,\ s>t\\ t-t\ln t & 0<t<1,\ s>1\\ 1 & t>1,\ s>1\end{cases}$$

(1) $\int_0^s\int_0^x \frac{1}{x}\,dy\,dx=s$

(2) $\int_0^t\int_0^x \frac{1}{x}\,dy\,dx+\int_t^s\int_0^t \frac{1}{x}\,dy\,dx$

(3) $\int_0^t\int_y^1 \frac{1}{x}\,dx\,dy=\int_0^t -\ln y\,dy=$

$=-\left(y\cdot\ln y\Big|_0^t-\int_0^t dy\right)$

(ב)

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{x}\,dy & 0<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\Rightarrow\quad X\sim U(0,1)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 \frac{1}{x}\,dx & 0<y<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-\ln y & 0<y<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$COV(x,y) = E[x\cdot y] - E[x]\cdot E[y] \qquad .(d)$$

$$E[x\cdot y] = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x}\cdot xy\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{6}$$

$$E[x] = \frac{1}{2} \quad , \quad E[y] = -\int_0^1 y\ln y\,dy = \frac{1}{4}$$

$$cov(x,y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$V(x+y) = V(x) + V(y) + 2cov(x,y)$$

(ב) נקודה מקרית מפולגת אחידה בתחום

$|x|+|y|\le 1$

מצא

(א). את פונקציות השוליות. האם x, y בלתי תלויים?

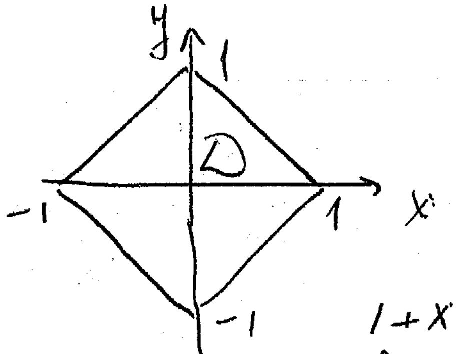
(ב) $COV(x,y)$

<u>פתרון</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} c & |x|+|y|\le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$c\cdot S(D) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

כאשר



$$f(x) = \begin{cases} \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}dy = x+1 & -1<x<0 \\ \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2}dy = 1-x & 0<x<1 \\ 0 \end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}\int_{-1-y}^{1+y}\frac{1}{2}\,dx & -1<y<0\\ \int_{y-1}^{1-y}\frac{1}{2}\,dx & 0<y<1\\ 0\end{cases}=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0<y<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f(x,y)\neq f(x)\cdot f(y)$$

X, Y תלויים.

$$E[X]=E[Y]=0$$

$$E[X\cdot Y]=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{1+x}x\,y\,dy\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x}x\cdot y\,dy\,dx=$$

$$=0$$

$$COV(X,Y)=E[X\cdot Y]-E[X]\cdot E[Y]=0$$

X, Y בלתי מתואמים.

3. מ"מ $X\sim U(0,1)$, $Y\sim U(-1,0)$ בלתי תלויים. מצא את פונקצית הצפיפות של מ"מ $Z=X-Y$

פתרון:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\Leftarrow X\sim U(0,1)$$

$$f(y)=\begin{cases}1 & -1<y<0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\Leftarrow Y\sim U(-1,0)$$

X, Y בלתי תלויים $\Leftarrow$

$$f(x,y)=f(x)\cdot f(y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$0 \le Z \le 2 \quad \Leftarrow \quad Z = X - Y$

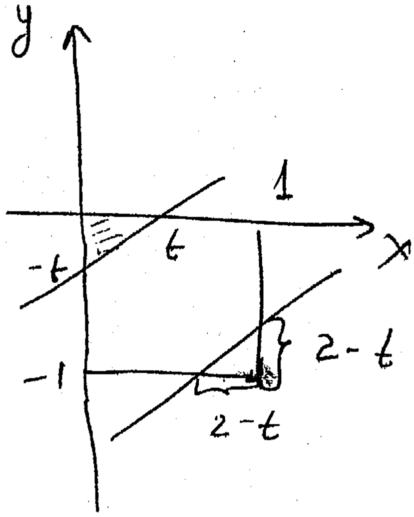
$F_Z(t) = 0$ עבור $t<0$

$F_Z(t) = 1$ עבור $t \ge 2$

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(X - Y \le t) = \iint_{x-y\le t} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$= S(A)$

כאשר $A = \{(x,y) \mid x - y \le t\}$



$F_Z(t) = \frac{t^2}{2}$ עבור $0 \le t < 1$

$F_Z(t) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2}$ עבור $1 \le t < 2$

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & 1 < t \le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>דרך שניה</u> בעזרת הקונבולוציה

$X - Y = X + (-Y)$

X, Y בלתי תלויים גם $X, -Y$ בלתי תלויים.

$$f_{X-Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_{-Y}(y)\,dy$$

פונקצית צפיפות של מ"מ $-y$:

$$f_{-y}(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_{x-y}(t)=\int_0^1 f_x(t-y)\,dy=\begin{cases}\int_0^t dy & 0<t<1\\ \int_{t-1}^1 dy & 1<t<2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}=$$

$0<t-y<1$

$t-1<\underset{\Downarrow}{y}<t$

$$=\begin{cases}t & 0<t<1\\ 2-t & 1<t<2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מספר 4. $X_i\sim U(0,1)$ לכל $i=1,2,\dots,10$ ונניח שכל ה-X_i-ים בלתי תלויים. חשב בקירוב את $P(\sum_{i=1}^{10}X_i>6)$

פתרון:

$$P\left(\sum_{i=1}^{10}X_i>6\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i-E[X_i]\cdot 10}{\sqrt{10\cdot V[X_i]}}\geq\frac{6-10\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{10\cdot\frac{1}{12}}}\right)\approx 1-\Phi(\sqrt{1.2})\approx 0.14$$

$X_i\sim U(a,b)$

$$\Downarrow$$

$E[X_i]=\frac{a+b}{2}$

$V[X_i]=\frac{(b-a)^2}{12}$

מלכבי· (5) ציונים במבחן מפולגים נורמלית עם תוחלת 75 ושונות 25. כמה סטודנטים יש לבחון כדי להבטיח ציון הממוצע במרחק בין 70 ועד ל-80 בהסתברות 0.9 לפחות.

פתרון: $X_i \sim N(75, 5^2)$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – ציון הממוצע

$$P(70 < \bar{X}_n < 80) \geq 0.9$$

n-?

$$P\left(\frac{70-75}{5/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}_n - 75}{5/\sqrt{n}} \leq \frac{80-75}{5/\sqrt{n}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(\sqrt{n}) - \Phi(-\sqrt{n}) = 2\Phi(\sqrt{n}) - 1$$

מכאן

$$2\Phi(\sqrt{n}) - 1 \geq 0.9$$

$$\Phi(\sqrt{n}) \geq 0.95$$

$$\sqrt{n} \geq 1.645$$

$$n \geq 2.7 \Rightarrow \boxed{n \geq 3}$$