תירגול 2

תזכורת:

לכל בניה הסתברותית יש 3 מרכיבים.
מרחב המדגם, אוסף מאורעות, פונקציית הסתברות.
מרחב המדגם הוא אוסף כל תוצאות אפשריות של הניסוי. מאורע הוא תת-קבוצה של מרחב המדגם.
פונקציית הסתברות מקיימת 3 האקסיומות הבאות

1. $0 \le P(A) \le 1$, A מאורע
2. $P(\Omega) = 1$, Ω - מרחב המדגם.
3. $A_1, A_2, \dots$ מאורעות זרים בזוגות

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$
- אם Ω סופי, ומניחים שכל התוצאות בו שוות-הסתברות, אז-

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

שאלה 1

קופסה מכילה 3 כדורים: אחד אדום, אחד ירוק ואחד כחול. מוציאים כדור אחד מהקופסה, מחזירים אותו לקופסה ומוציאים שנית כדור אחד. תאר את מרחב המדגם בניסוי זה. תאר את מרחב המדגם בניסוי שבו מוציאים את הכדור בפעם השניה בלי להחזיר קודם לכן את הכדור שהוצא בפעם הראשונה.

<u>פתרון</u>

$\Omega_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\Omega_2 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

1 - סגול

2 - ירוק

3 - כחול

② לקוח הנכנס למחלקת החליפות של חנות כלבו יקנה חליפה בהסתברות 0.22, חולצה בהסתברות 0.3 ועניבה בהסתברות 0.28. הלקוח יקנה חליפה וחולצה בהסתברות 0.11, חליפה ועניבה בהסתברות 0.14, חולצה ועניבה בהסתברות 0.1. הלקוח יקנה את כל 3 הפריטים בהסתברות 0.06. מה ההסתברות שלקוח -

(א) לא יקנה אף פריט?

(ב) יקנה בדיוק אחד מהפריטים?

<u>פתרון:</u> נגדיר מאורעות A - קונה חליפה

B - קונה חולצה

C - קונה עניבה

$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1-P(A\cup B\cup C) = (\text{א})$

$= 1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-$

$-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)) = 1-(0.22+0.3+0.28-$

$-0.11-0.14-0.1+0.06) = 0.49$

(ב)

לפחות אחד

בדיוק אחד $\underbrace{\text{בדיוק שניים} \quad \text{בדיוק שלוש}}_{\text{לפחות שניים}}$

$P(\text{לפחות אחד}) = P(A\cup B\cup C) = 0.51$

$P(\text{לפחות שניים}) = P((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) =$

$$= P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap A\cap C) -$$
$$- P(A\cap B\cap B\cap C) - P(A\cap C\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap C) =$$
$$= 0.23$$

$$P(\text{בדיוק אחד}) = 0.51 - 0.23 = 0.28$$

(3) טורפים חפיסה רגילה של 52 קלפים. מהי ההסתברות שארבעת הקלפים הראשונים הם

(א) בעלי ערכים שונים?

(ב) מצורות שונות?

פתרון (א).
$$\frac{52\cdot 48\cdot 44\cdot 40}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} \approx 0.7$$

(ב)
$$\frac{52\cdot 39\cdot 26\cdot 13}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} \approx 0.1$$

(4) ביד בת 5 קלפים, המתקבלת מחפיסה טרופה היטב של 52 קלפים, מהי ההסתברות שיש לפחות קלף אחד מכל אחת מארבע הצורות?

פתרון: נסמן ב-A את המאורע שביד בת 5 קלפים יש לפחות קלף אחד מכל אחת מארבע הצורות.

$\bar{A}$ - לפחות אחת מארבע הצורות חסרה ביד בת 5 קלפים.

נסמן ב-A_i את המאורע שאין אף קלף מהצורה i בין 5 הקלפים שביד

$i=1,2,3,4$

לכן
$$\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$P(\bar{A}) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i\cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i\cap A_j\cap A_k) -$$
$$- P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = 4\cdot P(A_1) - \binom{4}{2} P(A_1\cap A_2) +$$
$$+ \binom{4}{3} P(A_1\cap A_2\cap A_3) - 0 = \frac{1}{\binom{52}{5}}\Big[4\binom{39}{5} - 6\binom{26}{5} +$$

$$+4\cdot\binom{13}{5}\Big] \approx 0.73625$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.26375$$

או

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{2}\cdot 13^3}{\binom{52}{5}} \approx 0.26375$$

יש לבחור קלף אחד מכל אחת מארבע הצורות = שני קלפים מאותה צורה, וקלף אחד מכל אחת משלוש הצורות השונות ממנה

$\binom{4}{1}$ בחירה של צורה, שממנה יש 2 קלפים.

$\binom{13}{2}$ בחירה של שני קלפים

5. בארון 10 זוגות נעליים שונים. בוחרים באופן מקרי 4 נעליים. מהי ההסתברות שנקבל בדיוק זוג אחד של נעליים תואמות?
נקבל שני זוגות?
לא נקבל אף זוג?

פתרון:

$$|\Omega| = \binom{20}{4}$$

$$|A_1| = \binom{10}{1}\cdot\frac{18\cdot 16}{2} \qquad P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{96}{323}$$

$$|A_2| = \binom{10}{2} \qquad P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{323}$$

$$A_3 = \overline{A_1 \cup A_2} \qquad P(A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = \frac{224}{323}$$

6) בעיית הבחירות

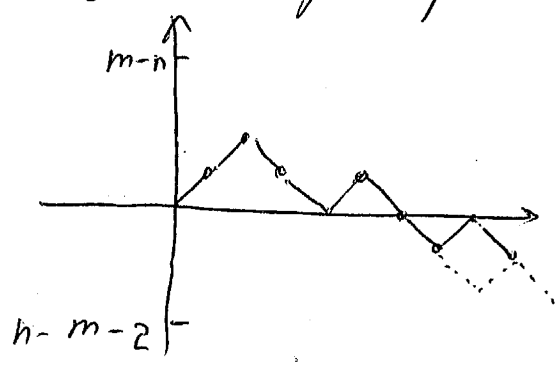
בבחירות בין שני מועמדים זכה מועמד א׳ ב-m קולות ומועמד ב׳ ב-n קולות, כאשר $n \geq m$. מה ההסתברות לכך שבתהליך מניית הקולות לא יוביל מועמד ב׳ בשום שלב?

פתרון:

מספר האפשרויות הכולל לחלוקת הקולות בין מועמדים הוא $\binom{n+m}{m}$

ניתן להתאים בין האפשרויות השונות לבין מסלולים המובילים במישור מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(n+m, n-m)$, כאשר בכל שלב עוברים מנקודה (x,y) לאחת הנקודות $(x+1, y+1)$ או $(x+1, y-1)$.

ההתאמה היא ע״י כך שבכל שלב בו הקול הוא לטובת מועמד א׳ מגדילים את y, וכאשר הוא לטובת מועמד ב׳ מקטינים את y.



באופן זה, מספר האפשרויות בהן מועמד א׳ לא יפגר אחרי מועמד ב׳ בשום שלב הינו מספר המסלולים הנ״ל שאינם יורדים אל מתחת לציר x.

נתבונן בקבוצה המשלימה של מסלולים אלו היורדים בשלב מסוים אל מתחת לציר x.

לכל מסילה נתאים את המסילה הזהה

לה עד לירידה הראשונה לנקודה $(j,-1)$ ואשר ממשיכה לאחר מכן ע"י שיקוף המסילה המקורית סביב הישר $y=-1$. ע"י שיקוף כזה מגיעים לבסוף לנקודה $2-m-n$.

יתרה מכך, ההתאמה בין המסילות מ-$(0,0)$ ל-$(n-m, n+m)$ אשר יורדות מתחת לציר x, לבין כל המסילות מ-$(0,0)$ ל-$(2-m-n, n+m)$, היא חח"ע ועל. בקבוצה השניה של מסילות, כל מסילה עולה $(1-n)$ פעמים ויורדת $(1+m)$ פעמים. ולכן מס' מסילות אלה $\binom{n+m}{m+1}$.

לכן מס' המסילות שאינן יורדות אל מתחת לציר x הוא

$$\binom{m+n}{m}-\binom{m+n}{m+1}=\binom{m+n}{n}\left(1-\frac{n}{m+1}\right)$$

ולכן ההסתברות היא $\frac{m-n+1}{m+1}$

לעתים מנסחים את הבעיה בצורה שונה במקצת. מניחים כי $n>m$, ושואלים מהי ההסתברות לכך שמועמד A מוביל (ממש) בכל תהליך הספירה. בדומה לחישוב שלנו ניתן להראות כי ההסתברות היא $n+m/n-m$.

בעיה אחרת שהיא למעשה מקרה פרטי של בע"ה זו, היא כדלקמן: $n+m$ אנשים עומדים בתור להצגה. מחיר כרטיס 50 ש"ח. ל-n מהאנשים שטר בן 50 ש"ח ול-m שטר בן 100 ש"ח. בקופה אין בהתחלה כסף. מהי ההסתברות לכך שאף אחד מבעלי ה-100 ש"ח לא יצטרך להמתין לעודף?

מפתרון הבעיה הקודמת ברור כי התשובה היא $\frac{1}{n+1}$. באופן שקול, מס' הסדרות באורך $2n$ של 0-ים ו-1-ים, בהן מספר ה-0-ים בכל רישא אינו קטן ממספר ה-1-ים, הוא

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

7. מטילים שתי קוביות עד שסכום התוצאות המתקבלות הוא 5 או 7. חשב את ההסתברות לקבל 5 לפני 7.

פתרון

נסמן ב-A_n את המאורע ש-5 מתקבל בהטלה ה-n-ית, ושב-$n-1$ ההטלות הראשונות לא התקבל 5 או 7.

נסמן ב-B את המאורע ש-5 נקבל לפני 7. לכן

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ מאורעות זרים.

לכן

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{אקס' 3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P(A_i) = \frac{26^{i-1} \cdot 4}{36^i}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{26^{i-1} \cdot 4}{36^i} = \frac{4}{36} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{36}{10} = 0.4$$