תירגול 6
תוחלת של משתנה
מקרי בדיד

- $E[X]=\sum_{x} x\cdot P(X=x)$
- $E[f(X)]=\sum_{x} f(x)\cdot P(X=x)$
- $E[X_1+X_2+\dots+X_n]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$
- $E[aX+b]=aE[X]+b$
- $X\sim U[a,b] \Rightarrow E[X]=\frac{b-a+2}{2}$
- $X\sim B(n,p) \Rightarrow E[X]=n\cdot p$
- $X\sim G(p) \Rightarrow E[X]=\frac{1}{p}$
- $X\sim H(n,a,b) \Rightarrow E[X]=n\cdot\frac{a}{a+b}$
- $X\sim P(\lambda) \Rightarrow E[X]=\lambda$

שאלות:

1. קופסה מכילה 3 קלפים המסומנים ב- 1,2,3 , אשר נשלפים אחד אחרי השני ללא החזרה. יהי X המשתנה המקרי השווה למספר ההתאמות בין סימני הקלפים ומקומם בתור ההופעה. מצא את פונקצית ההסתברות ואת פונקצית ההתפלגות של המ"מ X. מצא את $E[X]$.

פתרון: הערכים האפשריים של המ"מ X: 3, 1, 0

$P(X=0)=\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$

$P(X=1)=\frac{3}{3!}=\frac{1}{2}$

$P(X=3)=\frac{1}{3!}$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/3 & 0 \le t < 1 \\ 5/6 & 1 \le t < 3 \\ 1 & t \ge 3 \end{cases}$$

$$E[X] = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6} = 1$$

2. מהקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ בוחרים מספרים אחד אחרי השני עם החזרה עד אשר כל מספר יופיע לפחות פעם אחת. מצא את תוחלת מספר הדגימות הנדרש.

<u>פתרון</u>: נגדיר מ"מ X כמספר הניסויים עד לקבלת מספר i-י חדש $(i=1,2,\dots,n)$, אזי

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

<u>לדוגמא:</u> $\{1,2,3\}$ $\quad 1\,1\,1\,2\,2\,1\,1\,1\,3$

$X_1 = 1$

$X_2 = 3$

$X_3 = 5$

$X = 9$

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n]$$

$$E[X_1] = 1 \quad \Leftarrow \quad X_1 = 1$$

$$E[X_2] = \frac{n}{n-1} \quad \Leftarrow \quad X_2 \sim G\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\dots$$

$$E[X_i] = \frac{n}{n-i+1} \quad \Leftarrow \quad X_i \sim G\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

$$\dots$$

$$E[X_n] = n \quad \Leftarrow \quad X_n \sim G\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$E[X] = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} = n\cdot\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

(3) קופסה מכילה N קלפים הממוספרים ב- $1,2,\dots,N$
בהתחלה אברהם מוציא קלף אחד ומקבל אותו מספר שקלים שמסומן בקלף. יצחק מוציא קלף שני באותם תנאים. מי מהם יזכה יותר בממוצע?

<u>פתרון:</u> X- הסכום שיקבל אברהם
Y - הסכום שיקבל יצחק

$$P(X=k)=\frac{1}{N}$$

$k=1,2,\dots,N$

$$P(Y=s)=P(Y=s\mid X\neq s)\cdot P(X\neq s)=$$

$s=1,2,\dots,N$

$$=\frac{1}{N-1}\cdot\frac{N-1}{N}=\frac{1}{N}$$

$$E[X]=E[Y]$$

(4) כד מכיל n כדורים הממוספרים ב-$1,2,\dots,n$.
נניח כי מוציאים את הכדורים מהכד ללא החזרה עד אשר בשלב מסוים i מוציאים כדור שמספרו שונה מ-i או עד שמוציאים את כל הכדורים לפי סדר. יהי X מספר הכדורים שהוצאו (לדוגמה, אם בשלב הראשון הוצאנו את כדור מס' 1, בשלב השני את כדור מס' 2 ובשלב השלישי כדור מס' 7, הרי הניסוי יגמר בשלב השלישי; $X=3$)
מצא

(א) $P(X=5\mid X\geq 4)$

(ב) הוכח כי $E[X]\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

<u>פתרון:</u> (א)
$$P(X=5\mid X\geq 4)=\frac{P(X=5)}{P(X\geq 4)}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}$$

$$P(X \geq 4) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$$

או

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) =$$

$$= 1 - \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$$

(ב). נגדיר

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{כדורים } i-1 \text{ ראשונים במקומם} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$1 \leq i \leq n$

$E[X]$ - ?

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$E[X] = E[X_1 + \ldots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$E[X_i] = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0)$$

$$P(X_1 = 1) = 1$$

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{n}$$

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$\ldots$

$$E[X] = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 2}$$

$$1 \leq E[X] \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$E[X] \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

(5) אברהם מטיל קוביה $n+1$ פעמים.
יצחק מטיל קוביה n פעמים.

(א) נסמן ב- p_n את ההסתברות לכך שלאברהם ויצחק יש אותו מס' של תוצאות זוגיות.
הוכח כי $\sqrt{n}\cdot p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$, $c>0$

(ב). נסמן ב-X סכום התוצאות שמקבל אברהם, ב-Y את סכום התוצאות שמקבל יצחק.
הוכח כי מס' נקודות האי-רציפות של פונקצית ההתפלגות של המ"מ X יותר גדול ממספר נקודות האי-רציפות של פונקצית ההתפלגות של המ"מ Y.

<u>פתרון:</u> נסמן ב-S מס' התוצאות הזוגיות של יצחק
ב-T - מס התוצאות הזוגיות של אברהם

$$p_n = P(T=S) = \sum_{k=0}^{n} P(T=k, S=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{n}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot \binom{n}{k} = \frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2n+1}{n}$$

עבור n גדול

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

נשים לב כי

$$\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{2n+2}{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!}} \quad \frac{1}{2} \cdot \binom{2(n+1)}{n+1}$$

$$p_n = \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2} \binom{2(n+1)}{n+1}$$

$$\binom{2k}{k} \underset{k\ \text{גדול}}{\approx} \frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2k} \cdot \sqrt{2\pi}}{\left(k^{k+\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \left(e^{-k}\right)^2 \cdot 2\pi} =$$

$$= \frac{2^{2k} \cdot \sqrt{2} \cdot k^{2k} \cdot \sqrt{k}}{k^{2k} \cdot k \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}$$

לכן

$$p_n \approx \frac{1}{2^{2n+2}} \cdot \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi \cdot (n+1)}}$$

$$\sqrt{n} \cdot p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

(ב). ערכים אפשריים של מ"מ X:

$$n+1,\ n+2,\ \dots,\ 6(n+1)$$

לכן לפונקציית ההסתברות של המ"מ X
יש $6(n+1)-(n+1)+1 =$ נקודות אי-רציפות
$$= 5n+6$$

ערכים אפשריים של מ"מ Y:

$$n,\ n+1,\ \dots,\ 6n$$

לכן לפונקציית ההסתברות של המ"מ Y
יש $6n-n+1 = 5n+1$ נקודות אי-רציפות

(6) $X \sim G(p)$. מצא $E[X^2]$

פתרון

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p \underset{q=1-p\ \text{נסמן}}{=} p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} \left(k \cdot q^k\right)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k\right)' =$$

$$= p\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q}{p} \cdot k \cdot q^{k-1} p\right]' = \cancel{\sum_{k=1}^{\infty}}\ p \cdot \left(\frac{q}{p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p\right)' =$$

$$= p \cdot \left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)' = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

7. $X\sim B(n,p)$. מצא $E[2^X]$

פתרון

$$E[2^X]=\sum_{k=0}^{n} 2^k\cdot\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\cdot p^k =$$

$$=(2p+1-p)^n=(p+1)^n$$

8. נתון מ"מ X כך ש $E[(X+1)^2]=2$ ו $E[(X-1)^2]=1$
מצא את $E[X]$, $E[X^2]$.

פתרון

$$E[X]=E\left[\frac{(X+1)^2}{4}-\frac{(X-1)^2}{4}\right]=\frac{1}{4}\cdot E[(X+1)^2]-$$

$$-\frac{1}{4}E[(X-1)^2]=\frac{1}{4}\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}$$

$$E[X^2]=E\left[\frac{(X+1)^2+(X-1)^2}{2}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1-1=\frac{1}{2}$$

9. קוביה ~~▇~~ נזרקת n פעמים.
המ"מ X מוגדר כסכום התוצאות הזוגיות
המ"מ Y מוגדר כסכום התוצאות הקטנות
או שוות ל-3. האם $E[X]=E[2Y]$?

פתרון:

$$X_i=\begin{cases} k & \text{זוגי } k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad 1\le i\le n$$

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Y_i=\begin{cases} s & s=0,1,3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad 1\le i\le n$$

$$Y=\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$E[X_i] = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$E[X] = 2 \cdot n$$

$$E[y_i] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$E[y] = n$$

$$E[X] = 2 \cdot n = 2 \cdot E[y] = p\delta$$

$$= E[2y]$$