תירגול 7

משתנה מקרי רציף

• פונקצ"ת הצפיפות f של משתנה רציף X היא פונקציה אי-שלילית המקיימת

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

• פונקציה ההתפלגות המצטברת של משתנה רציף X ניתן ע"י

$$F_X(t)=P(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

מתקיים הקשר

$$F_X'(t)=f_X(t)$$

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

שאלות:

① נתונה פונקצית הצפיפות של המ"מ X

$$f(X)=a\cdot|X|\cdot e^{-X^2} \qquad -\infty<X<+\infty$$

מצא את

(א) a.

(ב) $E[X]$

פתרון

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} a\cdot|X|\cdot e^{-x^2}dx=2a\int_{0}^{\infty}X\cdot e^{-x^2}dx=$$

$$=a\cdot\left(-e^{-x^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=a \quad => \boxed{a=1}$$

(ב)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} X\cdot|X|\cdot e^{-x^2}dx=0$$

② תהי A נקודה הנבחרת באופן מקרי ואחיד בקטע [0,1] מחלקת אותו לשני חלקים [0,A] ו- (A,1]. נסמן ב-X את ארכו של החלק הקטן ביותר. מצא את פונקצית הצפיפות של X

פתרון: X_A מיקום הנקודה A בקטע $[0,1]$.

$X_A \sim U(0,1)$

$X=\min\{X_A, 1-X_A\}$

$F_X(t)=P(X\le t)=P(\min\{X_A,1-X_A\}\le t)=$

$$=\begin{cases}0 & t<0\\ ? & 0\le t<\frac{1}{2}\\ 1 & t\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$P(X\le t)=P(\underbrace{X_A\le t \cup 1-X_A\le t}_{\text{מאורעות זרים עבור } 0<t<\frac{1}{2}})=P(X_A\le t)+$

$+P(1-X_A<t)=P(X_A\le t)+1-P(X_A<1-t)=$

$=2t$

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 2t & 0\le t<\frac{1}{2}\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$

$$f_X(t)=F_X'(t)=\begin{cases}2 & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

3. אורך חיי מנוע (בשנים) מפולג מעריכית עם פרמטר λ. M מנועים דולקים במשך $1/\lambda$ שנים. מצא את ההסתברות שאף מנוע לא יתקלקל (הנחה שהמנועים עובדים ללא תלות אחד בשני)

פתרון: $X_i\sim exp(\lambda)$ $i=1,\dots,M$ $\Leftarrow$ $F_{X_i}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0\end{cases}$

A - אף מנוע לא יתקלקל

$P(A)=P(X_1>\frac{1}{\lambda}\cap X_2<\frac{1}{\lambda}\dots\cap X_M<\frac{1}{\lambda})=[P(X_1<\frac{1}{\lambda})]^M=$

$=[1-P(X_1\le\frac{1}{\lambda})]^M=e^{-M}$

(4) נתונה פונקצית הצפיפות של המ"מ רציף X

$$f_X(t)=\begin{cases} a & 0\le t\le 1 \\ b & 1<t\le 4 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

a, b קבועים

נתון $E[X]=1\frac{1}{2}$

(א) חשב את a ואת b.

(ב) חשב את פונקצית ההתפלגות $F_X(t)$

(ג) חשב את $P(0.5<X\le 2 \mid X>1)$

__פתרון:__

$$\begin{cases} \int_0^1 a\,dx+\int_1^4 b\,dx=1 \\ \int_0^1 ax\,dx+\int_1^4 bx\,dx=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3b=1 \\ \frac{1}{2}a+\frac{15}{2}b=1 \end{cases} \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2} \quad b=\frac{1}{6}$$

$$F_x(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t \frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}t & 0\le t<1 \\ \int_0^1 \frac{1}{2}dx+\int_1^t \frac{1}{6}\,dx= & 1\le t<4 \\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(t-1) & \\ 1 & t\ge 4 \end{cases}$$

$$P(0.5 < X \le 2 \mid X > 1) = \frac{P(1 < X \le 2)}{P(X > 1)} =$$

$$= \frac{F_X(2) - F_X(1)}{1 - F_X(1)} = \frac{1}{3}$$

5. לקוח מגע למשרד. הפקידה המקבלת קהל פנויה בהסתברות p_1, שותה קפה בהסתברות p_2 במשך זמן של $X_2 \sim U(0,30)$ דקות, עסוקה עם לקוח אחר בהסתברות p_3 במשך זמן של $X_3 \sim U(0,20)$ דקות או מפטפטת בטלפון בהסתברות p_4 במשך זמן של $X_4 \sim U(0,40)$ דקות. מצא את פונקצית ההתפלגות של זמן ההמתנה עד לקבלת לקוח.

<u>פתרון</u> X - זמן ההמתנה.

A_1 - הפקידה פנויה

A_2 - שותה קפה

A_3 - עסוקה עם הלקוח אחר

A_4 - מפטפטת בטלפון

$$F_X(t) = P(X \le t) = \sum_{i=1}^{4} P(X \le t \mid A_i) \cdot P(A_i) =$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ p_1 + t \cdot \frac{4p_2 + 6p_3 + 3p_4}{120} & 0 \le t < 20 \\ p_1 + p_3 + t \cdot \frac{4p_2 + 3p_4}{120} & 20 \le t < 30 \\ p_1 + p_2 + p_3 + t\,\frac{p_4}{40} & 30 \le t < 40 \\ 1 & t \ge 40 \end{cases}$$

⑥ נתונה פונקצית הצפיפות של המ"מ X

$$f_X(t)=\begin{cases} a\cdot(2e^{-t}+3e^{-2t}) & t\geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(א) מצא את a

(ב) מצא את התוחלת של X.

<u>פתרון</u>

$$f_X(t)=2a\cdot f_{X_1}(t)+\frac{3a}{2}\cdot f_{X_2}(t)$$

כאשר $X_1\sim exp(1)$, $X_2\sim exp(2)$.

$$f_{X_1}(t)=\begin{cases} e^{-t} & t\geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_{X_2}(t)=\begin{cases} 2e^{-t} & t\geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$2a+\frac{3a}{2}=1 \Rightarrow a=\frac{2}{7}$$

$$E[X_1]=1 \Leftarrow X_1\sim exp(1)$$

$$E[X_2]=\frac{1}{2} \Leftarrow X_2\sim exp(2)$$

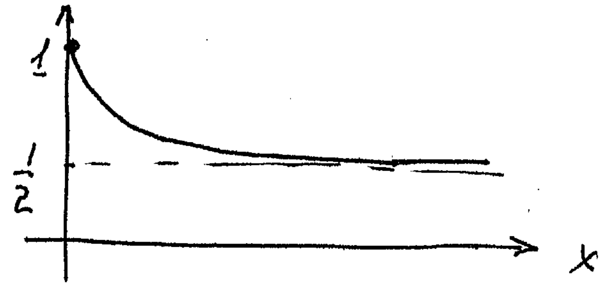
$$E[X]=2a\,E[X_1]+\frac{3a}{2}\,E[X_2]=\frac{4}{7}\cdot 1+\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{14}$$

⑦ $X\sim exp(\lambda)$. $Y=\dfrac{1+X}{1+2X}$

מצא את $f_Y(t)$.

<u>פתרון:</u>

$$\frac{1}{2}\leq Y\leq 1$$



$$F_y(t)=P(y\le t)=\begin{cases}0 & t<1/2\\ P\left(x>\frac{1-t}{2t-1}\right) & 1/2\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0 & t<\frac{1}{2}\\ e^{-\lambda\left(\frac{1-t}{2t-1}\right)} & \frac{1}{2}\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$

$$f_y(t)=F_y'(t)=\begin{cases}\left[e^{-\lambda\left(\frac{1-t}{2t-1}\right)}\right]' & \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$X\sim exp(\lambda)$ 8

$?\ P(\sin X>0)$

$$P(\sin x>0)=P(0<x<\pi)+P(2\pi<x<3\pi)+\dots=$$ [illegible]:

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\left(2k\pi<x<(2k+1)\pi\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-2\pi\lambda}\right)^k-e^{-\pi\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-2\pi\lambda}\right)^k=$$

$$=\frac{1-e^{-\pi\lambda}}{1-e^{-2\pi\lambda}}=\frac{1}{1+e^{-\pi\lambda}}$$