תירגול 8

שונות של משתנה מקרי

- $V[X]=E[(X-\mu)^2]$

כאשר $\mu=E[X]$

- $V[X]=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2$

שאלות:

① $X\sim U(-2,2)$ המ"מ אחיד רציף

$$y=\begin{cases} |X| & |X|\le 1 \\ 1 & 1<|X|<3/2 \\ 2 & |X|>3/2 \end{cases}$$

$$Z=y^2$$

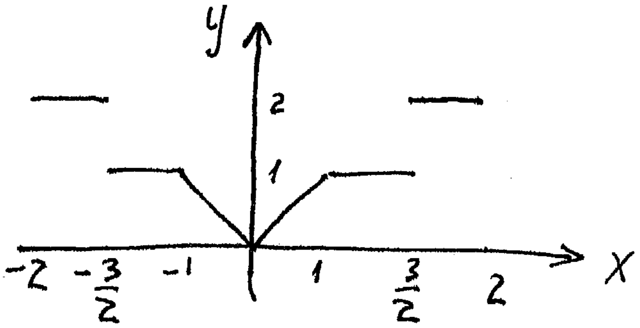
מצא את

(א) $F_y(t)$,

(ב) $F_Z(t)$

(ג) $V[y]$, $E[Z]$, $E[y]$

פתרון



$$F_y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ t/2 & 0\le t<1 \\ 3/4 & 1\le t<2 \\ 1 & t\ge 2 \end{cases}$$

עבור $0\le t<1$, $F_y(t)=P(y\le t)=P(-t\le X\le t)=\frac{2t}{4}$

עבור $F_y(t)=P(y\le t)=P\left(-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4},\quad 1\le t<2$

ב.) $F_z(t)=P(z\le t)=P(y^2\le t)=P(0\le y\le\sqrt{t})=$

$$=\begin{cases}0 & \sqrt{t}<0\\ \frac{\sqrt{t}}{2} & 0\le\sqrt{t}<1\\ 3/4 & 1\le\sqrt{t}<2\\ 1 & \sqrt{t}\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{\sqrt{t}}{2} & 0\le t<1\\ 3/4 & 1\le t<4\\ 1 & t\ge 4\end{cases}$$

ג) $E[y]=-\int_{-\infty}^{0}F_y(t)\,dt+\int_{0}^{+\infty}(1-F_y(t))\,dt$

y הוא מ״מ מעורב ולכן לחשוב תוחלת
נשתמש בנוסחה כללית

$$E[y]=\int_0^1\left(1-\frac{t}{2}\right)dt+\int_1^2\left(1-\frac{3}{4}\right)dt=1$$

$$E[z]=\int_0^1\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)dt+\int_1^4\left(1-\frac{3}{4}\right)dt=\frac{17}{12}$$

Z מ״מ מעורב

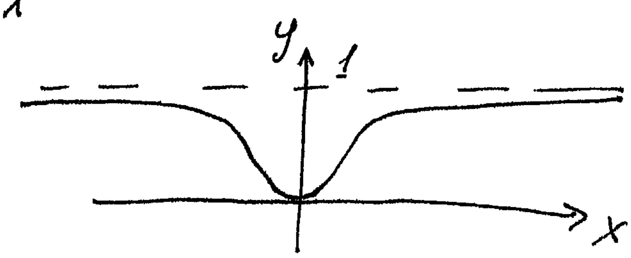
$$V[y]=E[y^2]-(E[y])^2=E[z]-(E[y])^2=$$

$$=\frac{17}{12}-1=\frac{15}{2}$$

2. $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad -\infty<x<+\infty$

א) מצא פילוג ל מ״מ $y=\frac{x^2}{1+x^2}$

פתרון



$$F_y(t)=P\left(\frac{X^2}{1+X^2}\le t\right)=P\left(-\sqrt{\frac{t}{1-t}}\le X\le\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)=$$

$$=F_X\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)-F_X\left(-\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)\quad,\quad 0<t<1$$

$$f_y(t)=F_y'(t)=f_X\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)'-$$

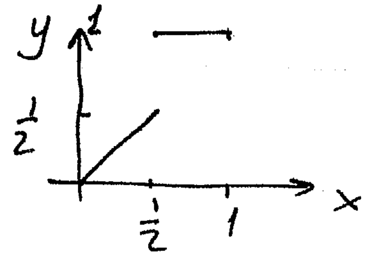
$$-f_X\left(-\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)'=2\cdot f_X\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{1-t}}}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\quad,\quad 0<t<1$$

3. נקודה נבחרת באופן מקרי על קטע $(0,1)$. X הוא המ"מ המוגדר כמרחק הנקודה מ-0. בהתאם להסכם מסויים דולר אחד ישולם אם $X\ge\frac{1}{2}$ ו-X דולר ישולם אם $X<\frac{1}{2}$. נסמן ב-Y התשלום ששולם כתוצאה מהניסוי. מצא פונקצית התפלגות של Y, $E[Y]$, $V[Y]$.

פתרון:

$$Y=\begin{cases}1 & X\ge\frac{1}{2}\\ X & X<\frac{1}{2}\end{cases}$$



$$F_y(t)=P(Y\le t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t<\frac{1}{2}\\ 1/2 & 1/2\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$

$$E[Y]=\int_0^{1/2}(1-t)\,dt+\int_{1/2}^{1}\frac{1}{2}\,dt=\frac{5}{8}$$

$$V[Y]=E[Y^2]-(E[Y])^2$$

$$F_{Y^2}(t)=P(Y^2\le t)=F_X(\sqrt{t})=\begin{cases}0 & t<0\\ \sqrt{t} & 0\le t<\frac{1}{4}\\ 1/2 & \frac{1}{4}\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$

$$E[Y^2]=\int_0^{1/4}(1-\sqrt{t})\,dt+\int_{1/4}^{1}\frac{1}{2}\,dt$$

$$V[Y]=\frac{29}{192}$$

4. הוכח

(א) $E[(X-c)^2]\ge V[X] \quad \forall c$

(ב) $P(a\le X\le b)=1 \Rightarrow V[X]\le\left(\frac{b-a}{4}\right)^2$

פתרון: (א)

$$E[(X-c)^2]-V[X]=E[(X-c)^2]-E[X^2]+(E[X])^2=$$

$$=E[X^2]-2cE[X]+c^2-E[X^2]+(E[X])^2=$$

$$=(E[X]-c)^2\ge 0 \quad \forall c$$

(ב) $V[X]\le E[(X-c)^2]$

ניקח $c=\frac{a+b}{2}$

$$V[X]\le E\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\underset{a\le X\le b}{\le} E\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]=\frac{(b-a)^2}{4}$$

5. נתונות שתי חפיסות קלפים, בכל אחת n קלפים ממוספרים מ-1 עד n. חפיסה אחת מסודרת בשורה לפי סדר עולה והחפיסה השנייה מסודרת באופן מקרי מתחת לחפיסה הראשונה.

יהי X מספר התלכדויות. מצא את $V[X]$.

<u>פתרון:</u>

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{התלכדות במקום } i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{n} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$E[X_i] = \frac{1}{n}, \quad E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] + \sum_{i \neq j} E[X_i \cdot X_j] =$$

$$= 1 + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 2$$

$$X_i \cdot X_j = \begin{cases} 1 & \text{התלכדות במקום } i \text{ ובמקום } j \\ 0 & \end{cases}$$

$$P(X_i \cdot X_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n \cdot (n-1)}$$

$$V[X] = 1.$$

(6) ב-n ניסויים בלתי תלויים, שבכל ניסוי הסתברות להצלחה היא p והסתברות לכשלון היא q, מצא שונות של מספר שתי הצלחות עוקבות.

<u>פתרון:</u>

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{הצלחה במקום } i \text{ ובמקום } i+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$$

$$E[X_i] = P(X_i = 1) = p^2$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} E[X_i] = (n-1) \cdot p^2$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[X_i^2] +$$

$$+ \sum_{|i-j|=1} E[X_i \cdot X_j] + \sum_{|i-j|>1} E[X_i \cdot X_j]$$

$$\underset{|i-j|=1}{X_i \cdot X_j} = \begin{cases} 1, & \text{הצלחה במקום } i, i+1, i+2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$P(X_i \cdot X_j = 1) = p^3$$

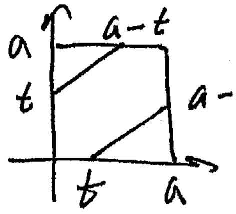
$$\underset{|i-j|>1}{X_i \cdot X_j} = \begin{cases} 1, & p^4 \\ 0, & 1-p^4 \end{cases}$$

לכן

$$E[X^2] = (n-1) \cdot p^2 + 2(n-2) \cdot p^3 +$$
$$+ \left((n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2)\right) p^4$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = (n-1)p^2 + 2(n-2)p^3 +$$
$$+ (5-3n)p^4.$$

7. נקודה מקרית (X,Y) מפולגת בהסתברות אחידה בתוך ריבוע $(0,a)^2$. מצא את $E[|X-Y|]$



פתרון

$$F_{|X-Y|}(t) = P(|X-Y| \le t) =$$
$$= \frac{a^2 - (a-t)^2}{a^2}, \quad 0 \le t \le a$$

$$f_{|X-Y|}(t) = \frac{2(a-t)}{a^2} \quad 0 \le t \le a$$

$$E[|X-Y|] = \int_0^a 2t \cdot \frac{(a-t)}{a^2}\, dt$$