

אם פונקציות ההסתברות הנתונות y, x

הן x, y נגזרות.

$P(X=Y)$ נחשב. (א)

$f(x, y)$ נחשב. (ב)

$V(X-Y)$ נחשב. (ג)

$y \backslash x$	0	1	2	$P(y)$
0	$1/8$	$1/8$	0	$1/4$
1	$1/8$	$2/8$	$1/8$	$1/2$
2	0	$1/8$	$1/8$	$1/4$
$P(x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1 = \sum_{x,y} P(x,y)$

$1 \text{ ש"ס} = 2^3$

נכונות

$P(X=0, Y=0) = P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) = \frac{1}{2^3}$

$P(X=0, Y=1) = P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) = \frac{1}{2^3}$

$P(X=0, Y=2) = 0$

$P(X=1, Y=0) = P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) = \frac{1}{2^3}$

$P(X=1, Y=1) = P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) + P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) = \frac{2}{2^3}$

$P(X=1, Y=2) = P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) = \frac{1}{2^3}$

$P(X=2, Y=0) = 0$

$P(X=2, Y=1) = P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) = \frac{1}{2^3}$

$P(X=2, Y=2) = P(\text{ש"ס}, \text{ש"ס}, \text{ש"ס}) = \frac{1}{2^3}$

$P(X=Y) = \sum_i P(X=i, Y=i) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (א)

$= \frac{1}{2}$

$n=2, p=\frac{1}{2} \quad X \sim B(n, p)$ (ב)

$n=2, p=\frac{1}{2} \quad Y \sim B(n, p)$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}}$$

$$\text{COV}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

$$E[X] = 1, E[Y] = 1$$

$$E[X \cdot Y] = \sum_{(i,j)} i \cdot j \cdot P(X=i, Y=j) =$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} +$$

$$+ 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{1/4}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}$$

$$V(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{1}{2}, \quad V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{1}{2}$$

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{COV}(X, Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

② משיקים קבועים סימטריים
 יהיו X - מספר ההצלחות בקטגוריה א ויהיו Y - מספר ההצלחות בקטגוריה ב
 יתקבל מספר זוגי קטן מ-6.

(א) מצא את ההסתברות המשותפת של (X, Y)

(ב) $P(X+Y=4)$

(ד) מה ההסתברות של $W = \min\{X, Y\}$

שהם $E[W], V[W]$

$$P(X=k, Y=k) = 0 \iff k=0$$

זכור $k < l$

$\{X=k, Y=l\}$ - הטלוח $k-1$ שבהן לא יצא
 2, 4, 6, והטלוח $l-k-1$ הוא 6, למחר מכתן
 יש $l-k-1$ הטלוח שהן לא 2 לא 4 ולבסוף
 בהטלוח $l-k-1$ יצא 2 לא 4

$\underbrace{\dots 6 \dots 2 \text{ לא } 4}$
 כול מספר מופץ $4, 2$
 ל-4 חז"ק

1 3 6 6 2 $k=3$, $l=5$

$$P(X=k, Y=l) = \left(\frac{3}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{l-k-1} \cdot \frac{2}{6}$$

זכור $k > l$

$\{X=k, Y=l\}$ - הטלוח $l-1$ שבהן לא יצא
 2, 4, 6, והטלוח $k-l-1$ הוא 2 לא 4,
 הטלוח $k-l-1$ הוא 6 ובהטלוח $k-l-1$
 יצא 6

$$P(X=k, Y=l) = \left(\frac{3}{6}\right)^{l-1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-l-1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(X+Y=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=3, Y=1) = \frac{1}{12} \quad (2)$$

(ב) $\{X, Y\}$ - הוסיף משתנה W כוסבר
 מספר הטלוח W לראשונה וקבלו מס' W
 הוסיף וכן $W \sim Co\left(\frac{1}{2}\right)$

$$E[W] = \frac{1}{1/2} = 2, \quad V[W] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2$$

$$\rho(V, W) = \frac{\text{COV}(V, W)}{\sqrt{V(V)} \cdot \sqrt{V(W)}}$$

"2" p'd'p'p'e
: / / > p'e

3-2 i' on p'd'p'p'e p'p'e on - $X_i \sim B(3, \frac{1}{6})$ p'd'p'p'e

$$V = X_2 + X_4 + X_6$$

$$W = X_2$$

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_2 + X_4 + X_6, X_2) &= \text{COV}(X_2, X_2) + \\ &+ \text{COV}(X_4, X_2) + \text{COV}(X_6, X_2) \end{aligned}$$

$$\text{COV}(X_2, X_2) = V(X_2) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

1 > $X_2 + X_4 \sim B(3, \frac{1}{3})$ 'o > p'd'p'p'e

$$V(X_2 + X_4) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$V(X_2 + X_4) = V(X_2) + V(X_4) + 2\text{COV}(X_2, X_4)$$

$$\text{COV}(X_2, X_4) = \frac{V(X_2 + X_4) - V(X_2) - V(X_4)}{2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{2} = -\frac{5}{6} / 2 = -\frac{5}{12}$$

$$\text{COV}(X_2, X_4) = \text{COV}(X_6, X_2)$$

$$\rho(V, W) = \frac{\frac{5}{12} - \frac{10}{12}}{\sqrt{\frac{5}{12}} \sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{5}{\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}$$