תירגול 1

קומבינטוריקה

שקף 1

- כלל המכפלה קובע, שאם בניסוי דו-שלבי יש n תוצאות אפשריות לשלב 1, ויש m תוצאות אפשריות לשלב 2, אז לניסוי כולל יש $m \cdot n$ תוצאות אפשריות
- יש $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ אפשרויות לסדר n עצמים בשורה

  מגדירים $0! = 1$
- $$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$$

הסימון $\binom{n}{i}$ מייצג את מספר התת-קבוצות השונות בגודל i שאפשר לבחור מתוך קבוצה בגודל n.

- $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

סימן זה מייצג את מספר החלוקות האפשריות של n עצמים שונים זה מזה ל-r קבוצות בגודל $n_1, n_2, \ldots, n_r$ שניתן להבחין ביניהן.

שאלה 1

כמה "מילים" שונות (ואפילו אין להן משמעות) אפשר להרכיב מהאותיות

(א) FLUKE

(ב) MISSISSIPPI

פתרון

(א) $5!$

(ב) $11!/2! \cdot 4! \cdot 4!$

2) במצולע משוכלל של n צלעות $(5 \le n)$ בוחרים באופן מקרי שני אלכסונים.

(א). בכמה דרכים אפשר לבחור שני אלכסונים?

(ב). בכמה דרכים אפשר לבחור שני אלכסונים נחתכים?

<u>פתרון</u> $\binom{n}{2}$ מספר ישרים שיוצרים n נקודות

$\binom{n}{2} - n$ מספר אלכסונים במצולע של n צלעות

לכן 2 אלכסונים אפשר לבחור ב:

$$\binom{\binom{n}{2} - n}{2} = \binom{\frac{n^2-3n}{2}}{2} = \frac{n^2-3n}{8}\cdot(n^2-3n-2)$$ דרכים

(ב). $\binom{n}{4}$

3) בכמה דרכים אפשר להכניס n כדורים שונים ל-n קופסאות אם

(א) בדיוק קופסה אחת ריקה?

(ב) בדיוק שתי קופסאות ריקות?

<u>פתרון</u>:

(א) $n\cdot\binom{n}{2}\cdot(n-1)!$

(ב) $\binom{n}{2}$ בחירה של שתי קופסאות ריקות

נשארו n-2 קופסאות, n כדורים

3 כדורים בקופסה אחת

2 כדורים בקופסה אחת + 2 כדורים בקופסה אחרת

$$\binom{n}{2}\cdot\left[\binom{n}{3}\cdot(n-2)!+\binom{n-2}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}\cdot(n-4)!\right]$$

סידור כדורים שנשארו

בחירה של 2 כדורים

מס' אפשרויות לבחור 2 קופסאות שבהן שני כדורים

בחירה של 2 כדורים

4. רושמים מספרים בני n ספרות, כשכל ספרה היא אחת מ-10 הספרות $0,1,\ldots,9$.
כמה מספרים כאלה ניתן לרשום, אם -

(א) אין במספר שני ספרות סמוכות שוות

(ב) הספרה 0 מופיעה i פעמים, כאשר $i=0,\ldots,n$

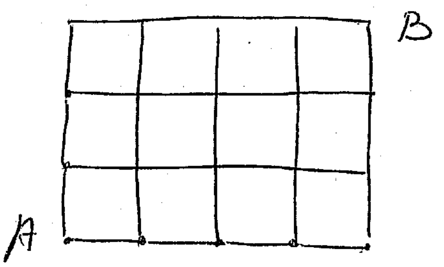
<u>פתרון</u>

(א). $10\cdot 9^{n-1}$

(ב) $\binom{n}{i}$ מס' אפשרויות לבחירת i מקומות שבהם תופיע הספרה 0, ובכל אחד מ $n-i$ המקומות הנותרים יכולה להופיע כל אחת מ-9 הספרות $1,2,\ldots,9$

$$\binom{n}{i}\cdot 9^{n-i}$$

5. נתבונן בסריג הנקודות שבאיור



נניח שאתה יוצא מהנקודה A ו"הולך" על הסריג מנקודה לנקודה, כאשר בכל מהלך אתה יכול לפסוע צעד אחד כלפי מעלה או צעד אחד ימינה. אם מטרתך היא הנקודה B, כמה מסלולים שונים מ-A ל-B עומדים לבחירתך?

פתרון: 4 צעדים ימינה

3 צעדים כלפי מעלה

$$\binom{7}{3}=\binom{7}{4}=35$$

6) מילת דיק היא מחרוזת ממספר זהה של X-ים ו-Y-ים (ואך ורק הם), כך ששום קטע באורך כלשהו מתחילת המחרוזת אינו מכיל יותר Y-ים מאשר X-ים.

לדוגמה מילות באורך 6:

XYXXYY

XXXYYY

שאלה: כמה יש מילים דיק באורך $2n$?

פתרון

נחשב בהתחלה כמה יש מילים באורך $2n$, שבהן n X-ים ו-n Y-ים.

$$\binom{2n}{n}$$

בשלב הבא נחשב מילים המכילות n אותיות של X-ים ו-n אותיות של Y-ים, אשר אינן מילים דיק

נשתמש בטריק הבא: יש למצוא את ה-Y הראשון שאינו מקיים את תנאי דיק, ואז להפוך כל האותיות אשר באות אחרי ה-Y הזה: X ל-Y, ו-Y ל-X.

xxyyy|xyx

↓

xxyyy|yxy

כל מילה כזו יכולה להתקבל דרך זו באופן יחיד.

במילה חדשה יש $n-1$ א-ים ו-$n+1$ ע-ים.

לכן מס' מילים שווה ל $\binom{2n}{n-1}$

ולכן מס' מילים דיק הוא

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$$

<u>שאלה 2</u>

7. כמה מילים באורך n אפשר ליצור מהאותיות A,B,C,D,E, כך ש-E מופיע מס' זוגי של פעמים?

<u>פתרון:</u>

א. <u>קומבינטורי ישיר</u>

עבור כל קבוצה של מקומות עבור האותיות A,B,C בתוך המילה ניתן להשלים את המקומות ע"י D-ים, E-ים באופן שמספר ה-E-ים יהיה זוגי בדיוק בחצי ממספר הדרכים הכולל להשלים את המקומות הריקים.

5^n-3^n - מס' המילים שאינן בנויות רק מ A,B,C

ב $\frac{5^n-3^n}{2}$ מילים E מופיע מספר זוגי של פעמים

ולכן התשובה היא

$$\frac{5^n-3^n}{2}+3^n=\frac{5^n+3^n}{2}$$

ב. <u>פתרון בעזרת נוסחת הבינום:</u>

נבחר מספר זוגי k של מקומות עבור ה-E-ים ונשלים את $n-k$ המקומות הנותרים בעזרת A,B,C,D. באופן זה נקבל כי הפתרון הוא

$$\sum_{k=0,\ k\ \text{זוגי}}^{n}\binom{n}{k}4^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^{n-k}=(4+1)^n=5^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 4^{n-k}\cdot(-1)^k=(4-1)^n=3^n$$

$$\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}\cdot 4^{n-k}=\frac{5^n+3^n}{2}$$

3). <u>פתרון בעזרת נוסחה רקורסיבית</u>

נסמן ב: a_n מספר מילים המבוקש באורך n.

a_n :

$A\underline{\qquad\qquad}$ a_{n-1}

$B\underline{\qquad\qquad}$ a_{n-1}

$C\underline{\qquad\qquad}$ a_{n-1}

$D\underline{\qquad\qquad}$ a_{n-1}

$E\underline{\qquad\qquad}$ $5^{n-1}-a_{n-1}$

לכן

$$a_n=4a_{n-1}+(5^{n-1}-a_{n-1})=$$
$$=3a_{n-1}+5^{n-1}$$

$a_0=1$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(3a_{n-1}x^n+5^{n-1}\cdot x^n)=$$

$$=1+3x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\cdot x^{n-1}}_{f(x)}+x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n=$$

$$=1+3x\cdot f(x)+\frac{x}{1-5x}$$

$$f(x)=\frac{1-4x}{(1-3x)(1-5x)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n$$

$$a_n = \frac{3^n+5^n}{2}$$

8. כמה "מילים" שונות אפשר לבנות מן האותיות A,B,C,D,E,F שבהן

(א) A קודמת ל-B (אך לא בהכרח צמודה)

(ב) A קודמת ל-B ו-C קודמת ל-D

(ג) A קודמת ל-B ו-B קודמת ל-C

(ד) E אינה האחרונה בשורה.

<u>פתרון:</u> (א) A - ~~[illegible]~~ קבוצת התמורות שבהן A קודמת ל-B

$\bar{A}$ - קבוצת התמורות שבהן B קודמת ל-A

לכן $|A| = \frac{6!}{2} = 360$

(ב) יש 360 סידורים שבהם A קודמת ל-B. במחציתם האות C קודמת ל-D, ובמחציתם האחרת D קודמת ל-C לכן יש

$$360/2 = 180$$

(ג) מבין התמורות של האותיות A,B,C,D,E,F מספר התמורות שבהן A קודמת ל-B שקודמת ל-C שווה למספר התמורות שבהן A קודמת ל-C שקודמת ל-B וכך הלאה.

יש סה"כ $6!=720$ תמורות של 6 האותיות ו $3!=6$ סידורים אפשריים של האותיות A,B,C מקבלים שמספר הסידורים שבהם A קודמת ל-B שקודמת ל-C הוא

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

(ד) $6!-5!=600$

E במקום אחרון.

9. כמה פונקציות על יש מקבוצה B בגודל n על קבוצה בת r איברים $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$?

<u>פתרון:</u> נסמן ב-U קבוצת כל הפונקציות מ-B ל-$\{y_1, \ldots, y_r\}$

A_i - קבוצת הפונקציות ש-y_i אינו בתמונה שלהן $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_r| = |U| - \sum_{i=1}^{r} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \ldots =$$

$$= r^n - r(r-1)^n + \binom{r}{2} \cdot (r-2)^n - \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot (r-k)^n$$