תירגול 10

משתנה מקרי דו-ממדי

• פונקציית הסתברות משותפת של זוג משתנים (X,Y):

$$P(x,y)=P(X=x,\ Y=y)$$

• פונקציות הסתברות שוליות

$$P_X(x)=P(X=x)=\sum_y P(X=x,\ Y=y)$$

(הסכום עובר על כל הערכים האפשריים y של מ"מ Y)

$$P_Y(y)=P(Y=y)=\sum_x P(X=x,\ Y=y)$$

• X,Y מ"מ בלתי תלויים אם"ם

$$P(X=x,\ Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$$

לכל x ולכל y.

שאלות:

בכד יש שלושה כדורים: אחד לבן, אחד שחור ואחד אדום. שלושה אנשים בוחרים כדור אחד בזה אחר זה עם החזרה. נסמן ב-X מספר צבעים שונים מכדורים שנבחרו, ב-Y מספר אנשים שבחרו כדור לבן.

(א) מצא פונקציית ההסתברות המשותפת

(ב) מצא פונקציית ההסתברות של $Z=X-Y$

(ג) מצא $P(X+Y\le 3\mid X-Y\ge 1)$

(ד) האם X,Y בלתי תלויים.

(ה) חשב את $cov(X,Y)$

פתרון: ערכים אפשריים של מ"מ X: $1,2,3$

ערכים אפשריים של מ"מ Y: $0,1,2,3$

$$|\Omega|=3^3=27$$

$$P(X=1,\ Y=0)=\frac{2}{27}$$

$$P(X=1,\ Y=1)=P(X=1,\ Y=2)=0$$

$$P(X=1,\ Y=3)=\frac{1}{27}$$

$$P(X=2,\ Y=0)=\frac{2^3-2}{27}=\frac{6}{27}$$

$$P(X=2,\ Y=1)=\frac{6}{27} \qquad P(X=2,\ Y=2)=\frac{6}{27}$$

$$P(X=2,\ Y=3)=0=P(X=3,\ Y=0)$$

$$P(X=3,\ Y=1)=\frac{6}{27}$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	$P_Y(y)$
1	2/27	0	0	1/27	3/27
2	6/27	6/27	6/27	0	18/27
3	0	6/27	0	0	6/27
$P_X(x)$	8/27	12/27	6/27	1/27	1

(ב)

$$Z=X-Y$$

ערכים אפשריים של Z:

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$P(Z=-2)=P(X=1,\ Y=3)=\frac{1}{27}$$

$$P(Z=-1)=P(X=1,\ Y=2)+P(X=2,\ Y=3)=0$$

$$P(Z=0)=P(X=1,\ Y=1)+P(X=2,\ Y=2)+P(X=3,\ Y=3)=\frac{6}{27}$$

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=2,\ Y=1)+P(X=3,\ Y=2)=\frac{8}{27}$$

$$P(Z=2)=P(X=2,\ Y=0)+P(X=3,\ Y=1)=\frac{12}{27}$$

$$P(Z=3)=0$$

(ד)
$$P(X+Y\le 3 \mid X-Y\ge 1)=\frac{P(X+Y\le 3,\ X-Y\ge 1)}{P(X-Y\ge 1)}=$$

$$=\frac{P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)}{P(\underbrace{X-Y}_{Z}\ge 1)}=$$

$$=\frac{19}{20}$$

(ה) X, Y תלויים

$$P(X=1,Y=0)\ne P(X=1)\cdot P(Y=0)$$

(ו) חשב את $COV(X,Y)$

$$COV(X,Y)=E[XY]-E[X]\cdot E[Y]$$

$$E[XY]=\sum_{x,y} x\cdot y\, P(X=x,\ Y=y)=1\cdot 2\cdot\frac{6}{27}+1\cdot 3\cdot\frac{6}{27}+$$

$$+2\cdot 2\cdot\frac{6}{27}+3\cdot 1\cdot\frac{1}{27}=\frac{12+18+24+3}{27}=\frac{57}{27}$$

$$E[X]=1\cdot\frac{3}{27}+2\cdot\frac{18}{27}+\frac{3\cdot 6}{27}=\frac{57}{27}$$

$$E[Y]=\frac{12}{27}+\frac{12}{27}+\frac{3}{27}=\frac{27}{27}=1$$

$$COV(X,Y)=\frac{57}{27}-\frac{57}{27}\cdot 1=0.$$

② נקודה מקרית (X,Y) מתפלגת בהסתברות אחידה בתוך ריבוע $(0,1)$.

(א) מצא פונקציות צפיפות של X ושל Y

(ב) מצא פונקצית צפיפות של $max\{X,Y\}$

(ג) חשב את $E[max\{X,Y\}]$ ואת $E[min\{X,Y\}]$

$$F_X(t)=P(X\le t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$

פתרון:

לכן $X\sim U(0,1)$

$Y\sim U(0,1)$

(ב)

$$F_{\max\{X,Y\}}(s)=P(\max\{X,Y\}\le s)=$$

$$=P(X\le s\cap Y\le s)=s^2,\quad 0\le s\le 1$$

$$f_{\max\{X,Y\}}(s)=\begin{cases}2s, & 0\le s\le 1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$E[\max\{X,Y\}]=\int_0^1 2t\cdot t\,dt=\frac{2}{3}$$

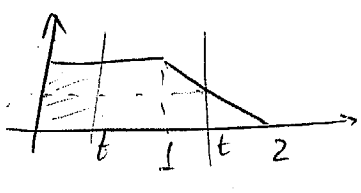
$$E[\min\{X,Y\}]=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$E[X]+E[Y]=E[X+Y]=E[\max\{X,Y\}+\min\{X,Y\}]=$$

$$=E[\max\{X,Y\}]+E[\min\{X,Y\}]$$

3. נקודה מקרית (X,Y) מפולגת בהסתברות אחידה בתוך תחום המוגדר $D=\{x\ge 0,\ 0\le y\le 1,\ x+y\le 2\}$. מצא את פונקציות הצפיפות של מ"מ X ו-Y.

פתרון



$$\begin{cases}x+y=2\\ x=t\end{cases}\Rightarrow y=2-t$$

$$F_X(t)=P(X\le t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{t}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}t & 0\le t\le 1\\ \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{(2-t)^2}{2}\right)\Big/\dfrac{3}{2} & 1\le t<2\\ 1 & t\ge 2\end{cases}$$

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} & 0<t\le 1 \\ \frac{2}{3}\cdot(2-t) & 1<t\le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$F_Y(s) = P(Y\le s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \frac{2}{3}\cdot\left(s\cdot\frac{(2-s)}{\cancel{2}}+\frac{s^2}{2}\right) & 0\le s<1 \\ 1 & s\ge 1 \end{cases}$$

$$f_Y(s) = F_Y'(s) = \begin{cases} \frac{2}{3}\cdot(2-s) & 0\le s\le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

4. מטילים קוביה סימטרית.
יהיו X מספר הטלות עד אשר לראשונה יתקבל 6,
Y מספר הטלות עד אשר לראשונה יתקבל מספר זוגי, קטן מ-6.

(א) מצא את ההסתברות המשותפת של (X,Y)

(ב) $P(X+Y=4)$

(ג) מהי ההתפלגות של $W=\min\{X,Y\}$
חשב את $E[W], V[W]$.

פתרון: $k=l$

$$P(X=k, Y=k)=0$$

עבור $k<l$

$\{X=k, Y=l\}$ - $k-1$ הטלות שבהן לא יצא 2,4,6, ההטלה ה-k-ית היא 6, לאחר מכן יש $l-k-1$ הטלות שבהן לא 2 או לא 4 ולבסוף בהטלה ה-l-ית יצא 2 או 4.

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{\text{אי-זוגיים}}^{k-1}\ 6\ \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{\text{כל מס' חוץ מ 4,2}}^{l-k-1}\ 2 \text{ או } 4$$

לדוגמה $1\ 3\ 6\ 6\ 2$ $\quad k=3$, $l=5$

$$P(X=k, Y=l) = \left(\frac{3}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{l-k-1} \cdot \frac{2}{6}$$

עבור $k>l$

$\{X=k, Y=l\}$ - $l-1$ הטלות שבהן לא יצא $2,4,6$

וההטלה ה-l-ית היא 2 או 4,

ו-$k-l-1$ הטלות לא יצא 6 והטלה

ה-k-ית היא 6

$$P(X=k, Y=l) = \left(\frac{3}{6}\right)^{l-1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-l-1} \cdot \frac{1}{6}$$

(ב) $P(X+Y=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=3, Y=1) = \frac{1}{12}$

(ג) $W=\min\{X,Y\}$ הוא מ"מ הסופר את מספר ההטלות עד לראשונה יתקבל מספר זוגי ולכן $W\sim G\left(\frac{1}{2}\right)$

$$E[W] = \frac{1}{p} = 2, \quad V[W] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

5. נניח כי $X_1, X_2, \dots, X_M \sim U[1,n]$ M משתנים מקריים בלתי תלויים (בדידים). נסמן ב $Y=\min_{1\le i\le M} X_i$, $Z=\max_{1\le i\le M} X_i$

(א) מצא פונקציית הסתברות של מ"מ Y

(ב) הראו ההתפלגות הגבולית של Y כאשר $M=n\to\infty$ הינה גאומטרית?

(ג) מצא פונקציית הסתברות של מ"מ Z.

הוכח כי (ד)

$$P_{Y,Z}(k,l) \le \left(\frac{l-k+1}{n}\right)^M$$

פתרון: (א)

$P(Y=k)$ – ?

$k=1,2,\dots,n$

$$P(Y\ge k)=P\left(\min_{1\le i\le M} X_i \ge k\right)=P(X_1\ge k,\dots,X_M\ge k)=$$

$$=\left[P(X_1\ge k)\right]^M=\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^M$$

$$P(Y=k)=P(Y\ge k)-P(Y\ge k+1)=$$

$$=\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^M-\left(1-\frac{k}{n}\right)^M \qquad k=1,2,\dots,n$$

$M=n$ (ב)

$$P(Y=k)=\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n-\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-(k-1)}-e^{-k}=$$

$$=e^{-(k-1)}\left(1-e^{-1}\right) \qquad k=1,2,\dots$$

$$Y \sim G\left(1-e^{-1}\right)$$

$n=M\to\infty$

$P(Z=l)$ – ?

(ג)

$l=1,2,\dots,n$

$$P(Z\le l)=P\left(\max_{1\le i\le M} X_i \le l\right)=\left[P(X_1\le l)\right]^M=$$

$$=\left(\frac{l}{n}\right)^M$$

$$P(Z=l)=P(Z\le l)-P(Z\le l-1)=$$

$$=\left(\frac{l}{n}\right)^M-\left(\frac{l-1}{n}\right)^M \qquad l=1,2,\dots,n$$

$$P(Y=k,Z=l)=P\left(\min_{1\le i\le M} X_i=k,\ \max_{1\le i\le M} X_i=l\right)\le \quad (ד)$$

$$\le P\left(\bigcap_{i=1}^{M} k\le X_i\le l\right)=\left[P(k\le X_1\le l)\right]^M=\left(\frac{l-k+1}{n}\right)^M$$

$1\le k\le l\le n$