

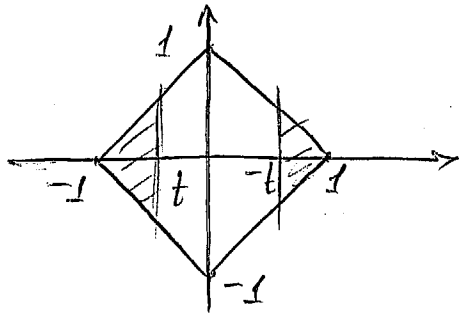
$$V[X-4] = V[X_3] = 30$$

$$COV(X, Y) = \frac{90 + 60 - 30}{2} = 60$$

$$\rho(X, Y) = \frac{60}{\sqrt{90 \cdot 60}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(4) נקודת מקור (X, Y) מכללת בהסתברות אחידה
 בתוך ריבוע עם קודקודים (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)

- (א) האם $\rho(X, Y)$ זהה ל-1?
 (ב) האם $\rho(X, Y)$ זהה ל-0?
 (ג) האם $P(X \cdot Y > 0)$?
 (ד) האם $P(X^2 + Y^2 < \frac{1}{4})$?



מסתברת X סימטרית
 סביב 0

$$P(X \leq t) = P(X \geq -t)$$

$$E[X] = E[-X] \quad \text{מכאן}$$

$$E[X] = 0 \quad \text{כך}$$

כך קובע ~~כך~~ כך

$$P(X \cdot Y \leq t) = P(X \cdot Y \geq -t)$$

$$E[X \cdot Y] = 0 \quad \text{כך}$$

$$\rho(X, Y) = 0 \quad \text{כך } \rho(X, Y) \neq 0 \quad (2)$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1, \frac{1}{2} \leq Y \leq 1\right) = 0$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) \neq 0$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq Y \leq 1\right) \neq 0$$

ק' מואתא $X, Y \leq f(X, Y) = 0$

$$P(X \cdot Y > 0) = P(X \geq 0, Y \geq 0) + P(X \leq 0, Y \leq 0) = \frac{1}{2} \quad (d)$$

$$P(X^2 + Y^2 < \frac{1}{4}) = \frac{\pi \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{\pi}{8} \quad (g)$$

משתנה מקרי נורמלי

הצגה למת X עם משתנה מקרי נורמלי
 קטן X הוא משתנה מקרי רציף שפונקציית
 הצפייה שלו נראית כ"ג" הנוסחה הבאה

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

משתנה מקרי נורמלי $Z \sim N(0, 1)$

$$P(Z \leq t) = \Phi_Z(t)$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \text{תכונה}$$

תכונה: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אז $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

תכונה
 $\Leftrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$

דוגמה

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ ידוע } (1)$$

(א) $P(X \leq c) = 0.9$ עם c נתון

(ב) $P(|X-\mu| \leq c) = 0.9$ עם c נתון

$$P(X \leq c) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 0.9 \quad (2)$$

$$= \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 0.9$$

$$\Phi(1.282) = 0.9 \quad \text{טבלה}$$

$$\frac{c - \mu}{\sigma} = 1.282 \quad \text{זן}$$

$$c = 1.282\sigma + \mu$$

$$P(|x - \mu| \leq c) = P(-c \leq x - \mu \leq c) = \quad (2)$$

$$= P\left(-\frac{c}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 = 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\Phi(1.645) = 0.95 \quad \text{טבלה}$$

$$\frac{c}{\sigma} = 1.645 \quad \text{זן}$$

$$c = 1.645\sigma$$

2. שוק ח"ק של נורה כחום $X \sim N(1000, 40000)$ שנה
 מצטטת מההסתברות לשמור 4 מחוק 1000 נורה
 ומשכו להפיק למטר 1600 שנה עבודה.
 פתרון: מצדק ג'י מספר נורה ש'משכו להפיק
 למטר 1600 שנה עבודה (מחוק 1000 נורה)

$$Y \sim B(1000, P(X > 1600))$$

$$P(X > 1600) = P\left(Z > \frac{1600 - 1000}{200}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = 0.0013$$

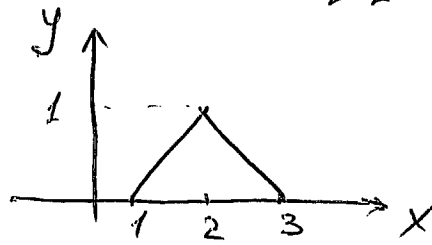
$$Y \sim P(\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0.0013)$$

בקירוב

$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - e^{-1.3} \cdot \left(1 + 1.3 + \frac{1.3^2}{2!} + \frac{1.3^3}{3!}\right)$$

שאלה יחסית:

נקודת מקרה (X, Y) מבוחרת מהסתברות אחידה
במקום $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(1, 0)$ קיבוצי קיבוצי $E[XY]$ חשב



פתרון:

$E[X] = 2$. נ"מ X סימטרי סביב 2 (כי $P(X \leq t) = P(X \geq 4-t)$)

$P(X \cdot Y \leq t) = P((4-X) \cdot Y \leq t)$ קיבוצי

$E[XY] = E[(4-X)Y]$ נ"מ

$E[XY] = E[4Y - XY] = E[4Y] - E[XY]$

$2E[XY] = 4E[Y]$

$E[XY] = 2E[Y]$

$f_Y(t) = \begin{cases} 2(1-t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

$E[Y] = 2 \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{1}{3}$

$E[XY] = \frac{2}{3}$