תירגול 12

משתנה מקרי נורמלי

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < +\infty$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
- אי-שוויון מרקוב

אם X הוא משתנה מקרי המקבל ערכים אי-שליליים בלבד, אז לכל ערך חיובי a מתקיים

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

- אי-שוויון צ'בישב

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 הן סופיות, אז לכל ערך חיובי k מתקיים

$$P(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

- החוק החלש של המספרים הגדולים

תהי $X_1, X_2, \dots$ סדרה של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ. אז, לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

שאלות:

1. גובהו של בן-אדם מפולג נורמלית עם ממוצע 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. מהו מספר הממוצע של האנשים אשר יעברו על פני המשגיח עד אשר יעבור אדם בעל גובה העולה על 190 ס"מ?

פתרון: יהי X גובהו של הבן-אדם.

$$X \sim N(170, 10^2)$$

נסמן ב-Y את מספר האנשים שיעברו עד אשר יעבור
אדם בעל גובה העולה על 190 ס"מ (כולל אדם
זה עצמו).

המספר הנדרש בשאלה הוא $E[Y-1]$

$$Y \sim G(p) \Rightarrow E[Y] = \frac{1}{p}$$

$$p = P(X > 190) = P\left(\frac{X-170}{10} > \frac{190-170}{10}\right) = P(Z>2) =$$

$$= 1 - \Phi(2) = \Phi(-2) = 0.02275$$

$$E[Y-1] = E[Y] - 1 = \frac{1}{0.023} - 1 \approx 43$$

2. מכונה אוטומטית מייצרת כדורי אספירין אשר
משקלם $X \sim N(\mu=1, \sigma^2=0.1)$ גרם. מכונה אחרת ממיינת
את התוצרת לשלוש קבוצות. כדורים בעלי משקל קטן
מ-0.95 גרם מרוכזים בקבוצה A, כדורים בעלי משקל
בין 0.95 ל-1.05 גרם - בקבוצה B, וכדורים בעלי משקל
גדול מ-1.05 גרם - בקבוצה C. כדור אחד נלקח
מקבוצה B. נסמן את משקלו ב-Y. מצא את
פונקצית הצפיפות של Y.

<u>פתרון</u>: הערכים האפשריים של Y הם כל המספרים
בקטע $[0.95, 1.05]$.

$$P(Y \le t) = \begin{cases} 0 , & t < 0.95 \\ ? , & 0.95 \le t < 1.05 \\ 1 , & t \ge 1.05 \end{cases}$$

עבור $0.95 \le t \le 1.05$

$$P(Y \le t) = P(X \le t \mid 0.95 \le X \le 1.05) =$$

$$= \frac{P(X \le t \cap 0.95 \le X < 1.05)}{P(0.95 \le X \le 1.05)} =$$

$$= \frac{P(0.95 \le X \le t)}{P(0.95 \le X \le 1.05)} = \left(\Phi\left(\frac{t-1}{\sqrt{0.1}}\right) - \Phi\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}}\right)\right) /$$

$$\left(\Phi\left(\frac{1.05-1}{\sqrt{0.1}}\right)-\Phi\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}}\right)\right) = \frac{\Phi\left(\frac{t-1}{\sqrt{0.1}}\right)-0.44}{1-2\cdot 0.44} =$$

$$= 8.33\ \Phi\left(\frac{t-1}{\sqrt{0.1}}\right) - \frac{0.44}{0.12}$$

$$f_y(t) = F'_y(t) = \begin{cases} 8.33\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-1)^2}{0.2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{0.1}}, & t\in[0.95,1.05] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3. יהי X מ"מ עם פונקצית צפיפות

$$f_X(x) = a\cdot(2e^{-x^2}+3\cdot e^{-2x^2}),\quad -\infty<x<+\infty$$

מצא את a, $E[X]$, $V[X]$.

פתרון:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} a(2e^{-x^2}+3e^{-2x^2})dx =$$

$$= 2a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx + 3a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}dx$$

נתבונן ב $X_1\sim N(0,\sigma_1^2)$ $\quad\sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$X_2\sim N(0,\sigma_2^2)$ $\quad\sigma_2=\frac{1}{2}$

לכן

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2a\sqrt{\pi} + 3a\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{\pi}(4+3\sqrt{2})}$$

$$E[X] = 0$$

$$V[X] = E[X^2] = 2a\sqrt{\pi}\,E[X_1^2] + \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}E[X_2^2] =$$

$$= a\sqrt{\pi}\cdot\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$$

4. מספר המכוניות הנמכרות בשבוע בסוכנות מסוימת הוא משתנה מקרי שתוחלתו 16. מצא חסם עליון להסתברות שבשבוע הבא "מכרו בסוכנות 15 יותר מ- 18 מכוניות.

פתרון: יהי X מספר המכוניות הנמכרות בשבוע.
X הוא מ"מ המקבל ערכים אפשריים אי-שליליים

לכן $$P(X>18)=P(X\ge 19)\le \frac{E[X]}{19}=\frac{16}{19}$$

5. יהיו $E[X]=E[Y]=75$

$V[X]=10,\ V[Y]=12,\ cov(X,Y)=-3$ ו-

מצא חסם עליון עבור $P(|X-Y|\ge 15)$

פתרון:
$$V[X-Y]=V[X]+V[Y]-2cov(X,Y)=$$
$$=10+12+6=28$$
$$P(|X-Y-E[X-Y]|\ge 15)\le \frac{28}{225}$$

6. 1000 כדורים מוכנסים ל-2 קופסאות A ו-B, כך שכל כדור יכול להיכנס לכל קופסה בהסתברות שווה וללא תלות בכדורים אחרים. נסמן ב-X_A ו-X_B את מספר הכדורים בקופסאות A ו-B בהתאמה.
מצא חסם מלרע להסתברות $P(|X_A-X_B|<10)$

פתרון:
$$X_A-X_B=\sum_{i=1}^{1000} X_i$$

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{כדור } i \text{ בקופסה } A\\ -1, & \text{כדור } i \text{ בקופסה } B\end{cases} \qquad 1\le i\le 1000$$

$$P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2}$$

X_i מ"מ ב"ת.

$$E[X_i]=0 \Rightarrow E[X_A-X_B]=0$$
$$V[X_i]=E[X_i^2]=1 \Rightarrow V[X_A-X_B]=1000$$

$$P(|X_A-X_B|<10)=1-P(|X_A-X_B|\ge 10)\ge$$
$$\ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2}=1-\frac{1000}{100}=-9$$

$\sigma^2=V[X_A-X_B]$, $k=10$

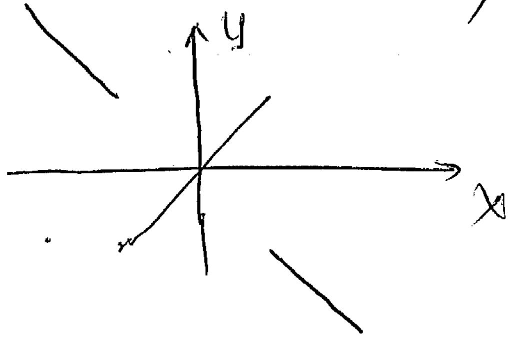
7. נניח כי $X \sim N(0,1)$

$$Y = \begin{cases} X, & |X| \le c \\ -X, & |X| > c \end{cases}$$

$c>0$ קבוע

מצא את פונקצית הצפיפות של המ"מ Y.

פתרון:



$$P(Y \le t) = \begin{cases} P(X \ge -t), & t < -c \\ P(-c \le X \le t) + P(X \ge c), & -c \le t < c \\ P(-t \le X \le -c) + P(X > -c), & t \ge c \end{cases} =$$

$$= P(X \le t), \quad -\infty < t < +\infty$$

לכן $Y \sim N(0,1) \Leftarrow$

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty$$

8. יהיו X, Y משתנים מקריים בדידים בלתי-תלויים.
$X \sim B(n,p)$, $Y \sim B(n,q)$. חשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} P(|X - 5Y - n(p-5q)| \ge 0.1n)$$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X-5Y-n(p-5q)| \ge 0.1n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X-5Y}{n} - (p-5q)\right| \ge 0.1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 5Y_i)}{n} - E[X_i - 5Y_i]\right| \ge 0.1\right) = 0$$

לפי החוק החלש של המספרים הגדולים.