

תורת המבחן

$-\infty < x < +\infty$   $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Leftrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \Leftrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$

•  $\epsilon$ -שינון מרכז  
 אם  $X$  הוא משנה מקרי המתפלגת על-פי  $\text{Exp}(\lambda)$  ומונתו  $\sigma^2$   
 בלבד, אז לכל ערך חיובי  $a$  מתק"פ  
 $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

•  $\epsilon$ -שינון צפיפות  
 אם  $X$  הוא משנה מקרי שמונתו  $\mu$  ושינויו  $\sigma^2$   
 הן סופיים, אז לכל ערך חיובי  $k$  מתק"פ

$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$

• תוכן המשפט המספיק המרכזי  
 יהי  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משנים מקריים בלתי-תלויים  
 זה-זה, הנתונים, שכל אחד מהם הוא סופי ומונתו  $\mu$   
 אז לכל  $\epsilon > 0$  מתק"פ

$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) \rightarrow 0$   
 $n \rightarrow \infty$

משפט

1. אובדן של  $n$  - עקב מותם זורמלר עם מחזור  
 170 ס"מ וספייר הקן של 10 ס"מ. מהו  
 מספר המחזור של הפאקטור של יבולת של  
 המספרים של  $\text{Exp}(\lambda)$  שכל אחד מהם הוא סופי ומונתו  $\mu$   
 של 100 ס"מ?  
 ככלי: יהי  $X$  אובדן של  $n$  - עקב  
 $X \sim N(170, 10^2)$

5011 א-4 סומן ה-4 מספר האנשים שנתנו קצת יותר  
 add של פרוצנטור של 190 ד"מ (כלל בלבד  
 75 (1131) .

המספר הנדרש בשאלה הוא  $E[Y-1]$

$$E[Y] = \frac{1}{p} \quad \leftarrow Y \sim G(p)$$

$$p = P(X > 190) = P\left(\frac{X-170}{10} > \frac{190-170}{10}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - \Phi(2) = \Phi(-2) = 0.02275$$

$$E[Y-1] = E[Y] - 1 = \frac{1}{0.023} - 1 \approx 43$$

2. מכונית אטומטית נ"צרה כקול' אטמ'רין עבר

מקבל  $X \sim N(\mu=1, \sigma^2=0.1)$  מכונית אטמ'רית נוספת

ההוצאה שלהם קבוצה. כקול' אטמ'רית מקבל קטן

0.95 - נ"צרה מכונית אטמ'רית אטמ'רית מקבל

0.95 - נ"צרה מכונית אטמ'רית אטמ'רית מקבל

0.95 - נ"צרה מכונית אטמ'רית אטמ'רית מקבל

מקבוצה B. סומן ה-4 מקבל ה-4 מוצא

פונקציה הצפייה של Y.

פונקציה הצפייה של Y: הנקודות האפשריות של Y הן 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000.

$$P(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & , t < 0.95 \\ ? & , 0.95 \leq t < 1.05 \\ 1 & , t \geq 1.05 \end{cases}$$

0.95 ≤ t ≤ 1.05

$$P(Y \leq t) = P(X \leq t | 0.95 \leq X \leq 1.05) =$$

$$= \frac{P(X \leq t \cap 0.95 \leq X < 1.05)}{P(0.95 \leq X \leq 1.05)} =$$

$$= \frac{P(0.95 \leq X \leq t)}{P(0.95 \leq X \leq 1.05)} = \left( \Phi\left(\frac{t-1}{\sqrt{0.1}}\right) - \Phi\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}}\right) \right) /$$

$$\left( \Phi\left(\frac{1.05-1}{\sqrt{0.1}}\right) - \Phi\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}}\right) \right) = \frac{\Phi\left(\frac{t-1}{\sqrt{0.1}}\right) - 0.44}{1 - 2 \cdot 0.44} =$$

$$= 8.33 \Phi\left(\frac{t-1}{\sqrt{0.1}}\right) - \frac{0.44}{0.12}$$

$$f_y(t) = F_y'(t) = \begin{cases} 8.33 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-1)^2}{0.2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.1}}, & t \in [0.95, 1.05] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3. ידוע כי  $X$  הוא  $N(\mu, \sigma^2)$  פונקציית הצפיפות  $f_X(x) = a \cdot (2e^{-x^2} + 3e^{-2x^2})$ ,  $-\infty < x < +\infty$   
 מצא  $V[X]$ ,  $E[X]$ ,  $a$  וכן  $\beta_3$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} a(2e^{-x^2} + 3e^{-2x^2}) dx =$$

$$= 2a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx + 3a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad X_1 \sim N(0, \sigma_1^2) \quad \text{הסתברות}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \quad X_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2a\sqrt{\pi} + 3a\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \int$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{\pi}(4+3\sqrt{2})}$$

$$E[X] = 0$$

$$V[X] = E[X^2] = 2a\sqrt{\pi} E[X_1^2] + \frac{3\sqrt{\pi}}{2} E[X_2^2] =$$

$$= a\sqrt{\pi} \cdot \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$$

4. מספר המכונים הנמכרים בסבון בסוכנות מיליון  
 כיום משתנה מקלו עולה על 100 מיליון  
 למספרים שבין 100 מיליון לסוכנות 15  
 יותר מ-18 מיליון

פתרון: יחי X מספר המכונה הנאמרת בשבוע.  
 X הוא מ"מ המקבל ערכים אפשר"ק ע"ש - של"מ"ק

$$P(X > 18) = P(X \geq 19) \leq \frac{E[X]}{19} = \frac{16}{19}$$

$$E[X] = E[Y] = 75 \quad \text{יחי 5}$$

$$V[X] = 10, V[Y] = 12, \text{COV}(X, Y) = -3$$

מצא חסם מעיל עבור  $P(|X - Y| \geq 15)$

$$V[X - Y] = V[X] + V[Y] - 2\text{COV}(X, Y) = 10 + 12 + 6 = 28$$

$$P(|X - Y - E[X - Y]| \geq 15) \leq \frac{28}{225}$$

6. 1000 כדורים מוכנסים ל-2 קוביות A ו-B, כך שכל כדור יכיל לפחות אחד הקוביות והשניה וללא גומא בכדורים אחרים. נסמן ב- $X_A$  ו- $X_B$  את מספר הכדורים בקוביות A ו-B בהתאמה.  
 מצא חסם מעיל להסתברות  $P(|X_A - X_B| < 10)$

$$X_A - X_B = \sum_{i=1}^{1000} X_i \quad \text{פתרון}$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{כדור } i \text{ בקובית } A \\ -1, & \text{כדור } i \text{ בקובית } B \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 1000$$

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

$X_i$  מ"מ נ"מ

$$E[X_i] = 0 \Rightarrow E[X_A - X_B] = 0$$

$$V[X_i] = E[X_i^2] = 1 \Rightarrow V[X_A - X_B] = 1000$$

$$P(|X_A - X_B| < 10) = 1 - P(|X_A - X_B| \geq 10) \geq$$

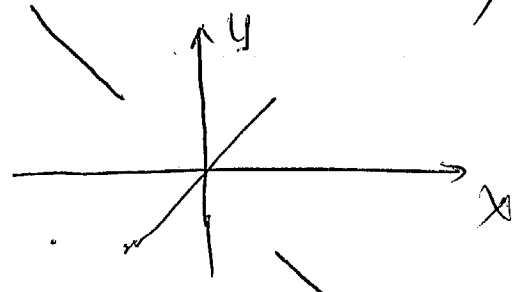
$$\geq 1 - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} = 1 - \frac{1000}{100} = 0.9$$

$$\sigma^2 = V[X_A - X_B], \quad \kappa = 10$$

7.  $X \sim N(0,1)$  7

$$Y = \begin{cases} X, & |X| \leq c \\ -X, & |X| > c \end{cases}$$

Y נ"מ ד' ל' נ'צ'צ'צ' א'צ'צ'צ' נ'צ'צ'צ'  $c > 0$



ע"פ

$$P(Y \leq t) = \begin{cases} P(X \geq -t), & t < -c \\ P(-c \leq X \leq t) + P(X \geq c), & -c \leq t < c \\ P(-t \leq X \leq -c) + P(X > -c), & t \geq c \end{cases}$$

$$= P(X \leq t), \quad -\infty < t < +\infty$$

$Y \sim N(0,1)$  7

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

8.  $Y \sim B(n, q), X \sim B(n, p)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X - 5Y - n(p - 5q)| \geq 0.1n)$$

ע"פ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X - 5Y - n(p - 5q)| \geq 0.1n) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X - 5Y}{n} - (p - 5q)\right| \geq 0.1\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 5Y_i)}{n} - E[X_i - 5Y_i]\right| \geq 0.1\right) = 0 \end{aligned}$$

ע"פ חוק המרכז