תירגול 13

משפט הגבול המרכזי

• משפט כל סדרה מ"מ ב"ת שווי-התפלגות בעלי תוחלת מקיימת את החוק החלש של המספרים הגדולים.

• משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת שווי-התפלגות בעלי תוחלת μ ושונות $0<\sigma^2<\infty$ אזי

$$P\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

כלומר, פונקצית ההתפלגות של המ"מ $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ מתכנסת לפונקצית ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית.

שאלות

1. ציונים במבחן מפולגים נורמלית עם תוחלת 75 ושונות 25. כמה סטודנטים יש לבחון כדי להבטיח ציון הממוצע במדגם בין 70 ל-80 בהסתברות 0.9 לפחות?

פתרון: $X_i \sim N(75,5^2)$ ציון של סטודנט i

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - ציון הממוצע.

$P(70<\bar{X}_n<80) \ge 0.9$, צ"ל: n.

$$P(70<\bar{X}_n<80) = P\left(\frac{70-75}{5/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}_n-75}{5/\sqrt{n}} < \frac{80-75}{5/\sqrt{n}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(\sqrt{n}) - \Phi(-\sqrt{n}) = 1-2\Phi(-\sqrt{n}) \ge 0.9$$

$$-2\Phi(-\sqrt{n}) \ge -0.1$$

$$\Phi(-\sqrt{n}) \le 0.05$$

$$-\sqrt{n} \le -1.65$$

$$n \ge 2.7$$

<u>תשובה</u> $\underline{n \ge 3}$, לפחות 3 סטודנטים.

• ככל שההתפלגות שממנה נלקחו המשתנים קרובה יותר להתפלגות נורמלית, כך יהיה הקירוב הנורמלי להתפלגות סכומם טוב יותר כבר עבור מספר קטן של ~~[illegible]~~ משתנים. לעומת זאת, אם ההתפלגות הינה מאוד לא סימטרית, אז יידרש מספר גדול מאוד של משתנים כדי שהקירוב הנורמלי יהיה טוב.

2. מצא את הגבול

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-n}$$

<u>פתרון</u>: נתבונן ב $X \sim P(n)$

$$P(X=k) = \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-n} = P(X \le n)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

כאשר $X_i \sim P(1)$ ו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ מ"מ ב"ת.

$$P(X \le n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le n\right) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \le 1\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \le \frac{1-1}{1/\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

3. משקל ביצה מתפלג נורמלית עם תוחלת 60 גרם וסטיית תקן 10 גרם. ביצה שמשקלה מתחת ל-55 גרם מסווגת כביצה מס' 3. בחנות מסוימת נאספו בסל 100 ביצים. מצא את ההסתברות שנוכל למלא תבנית אחת לפחות (בתבנית יש 30 תאים) של ביצים מס' 3.

פתרון: יהי X משקל של הביצה

$X \sim N(60, 10^2)$

$Y \sim B(100, p)$ - כמות הביצים מס' 3 שנמצאו בלול באותו יום.

$$p = P(X \le 55) = \Phi\left(\frac{55-60}{10}\right) = \Phi(-0.5) = 0.3085$$

צ"ל: $P(Y \ge 30)$.

$$P(Y \ge 30) = P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i \ge 30\right) = P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} Y_i \ge 0.3\right) =$$

$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ביצה ה-}i\text{ היא מסוג 3.} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ כאשר $1 \le i \le 100$

$$= 1 - P(\bar{Y}_n < 0.3) \underset{\text{משפט הגבול המרכזי}}{\approx} 1-\Phi\left(\frac{0.3-0.3085}{\sqrt{\frac{0.3085(1-0.3085)}{100}}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(-0.18) = 1 - 0.42857 = 0.571$$

4. זמן החיים (בימים) של רכיב מסוג מסוים הוא משתנה מקרי שפונקצית הצפיפות שלו נתונה ע"י

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

כשהתקלקל רכיב מחליפים אותו מיד ברכיב אחר מאותו סוג. כמה רכיבים יש להחזיק במלאי, אם רוצים להיות בטוחים ב-90% בערך שהמלאי יספיק ל-35 ימים לפחות?

פתרון: אם X_i מסמן את זמן החיים של הרכיב ה-i שמוחזק במחסן, אז $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ מייצג את הרגע שבו מתקלקל הרכיב ה-n-י שמוחזק במחסן.

$$P(S_n \ge 35) \ge 0.9$$

צ"ל: n.

$$P(S_n \ge 35) \underset{\text{משפט הגבול המרכזי}}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{n}35 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \ge 0.9$$

$$\mu = E[X_i] = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\sigma^2 = V[X_i] = \int_0^1 2x^3 dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\Phi\left(\frac{\frac{35}{n} - 2/3}{\sqrt{\frac{1}{18n}}} \right) \leq 0.1$$

$$\frac{35 - n \cdot 2/3}{\sqrt{n/18}} \leq -1.282$$

$$\left(35 - n \cdot \frac{2}{3}\right) \leq -1.282 \cdot \sqrt{n/18}$$

תשובה: $\underline{n \geq 56}$

הפונקציה יוצרת המומנטים

- בהנתן מ"מ X, נתבונן בפונקציה $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  המוגדרת ע"י $\psi(t) = E[e^{tX}]$, $t \in \mathbb{R}$
  היא נקראת הפונקציה יוצרת המומנטים.
  היא תלויה רק בהתפלגות של X.
- $\psi'(0) = E[X]$

  באופן כללי, $\psi^{(n)}(0) = E[X^n]$
- <u>משפט</u>: הפונקציה יוצרת המומנטים קובעת באופן יחיד את ההתפלגות
- <u>טענה</u>: יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ מ"מ ב"ת בעלי פונקציות יוצרות מומנטים $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, בהתאמה, ויהי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. בכל נק' t בה כל
  הפונקציות $\psi_i(t)$ קיימות, קיימת גם
  הפונקציה יוצרת המומנטים $\psi_X(t)$ של X
  ומתקיים $\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(t)$.

שאלות

1. $X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$, X,Y מ"מ ב"ת.
הוכח כי $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

פתרון: $\psi_X(t)=E[e^{tX}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}\cdot\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_1}=$

$$=e^{-\lambda_1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^t\cdot\lambda_1)^k}{k!}=e^{\lambda_1(e^t-1)}$$

$$\psi_Y(t)=e^{\lambda_2(e^t-1)}$$

$$\psi_{X+Y}(t)\underset{X,Y\ \text{ב"ת}}{=}\psi_X(t)\cdot\psi_Y(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(e^t-1)}$$

לכן $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

2. מ"מ X סימטרי סביב 0 בעל פונקציה יוצרת מומנטים $\psi_X(t)$. הוכח כי הפונקציה יוצרת המומנטים היא זוגית.

פתרון: X , $-X$ שוו-התפלגות כי X סימטרי סביב 0

לכן $E[e^{tX}]=E[e^{t(-X)}]$

$$E[e^{tX}]=\psi_X(t)$$

$$E[e^{t(-X)}]=E[e^{-t\cdot X}]=\psi_X(-t)$$

לכן $\psi_X(t)=\psi_X(-t)$

3. האם הטענה הבאה נכונה?
אם הפונקציה יוצרת המומנטים של מ"מ X היא $\psi_X(t)=\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}$ אז $P(-1\le X\le 1)\ge\frac{1}{9}$?

פתרון: $\psi_X(t)=\frac{e^{3t}}{2}+\frac{e^{-3t}}{2}$

לכן

X	-3	3
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

פונקצ'ת יוצרת מומנטים קובעת התפלגות באופן יחיד.

לכן $P(-1 \le X \le 1) = 0$

טענה לא נכונה.

4. האם יכול להיות כי הפונק' יוצרת המומנטים של מ"מ X שווה ל- (א) $(t-1)^5$

(ב) $\cos t$

<u>פתרון</u>: (א) עבור $t=0$ $\psi_X(t) = -1$

לכן תשובה היא "לא יכולה"

(ב) $\psi_X(t) = \cos t$

לכן $E[X^2] = \psi''(0) = -1$

סתירה.

5. מטילים קוביה n פעמים. נסמן ב-X מס' ההטלות הזוגיות וב-Y מס' ההטלות האי-זוגיות.

(א) עבור n גדול חשב

$$P(|X-Y| \le \sqrt{n})$$

(ב) האם נכון כי

$$P\left(\left|X-Y-\frac{n}{2}\right| > \varepsilon n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>פתרון</u>:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{הפעם ה-}i\text{ מס' } 2,4,6 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \qquad Y_i = \begin{cases} 1, & \text{הפעם ה-}i\text{ מס' } 1,3,5 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E[X] = nE[X_i] = \frac{n}{2} \qquad E[Y] = \frac{n}{2}$$

$$E[X-Y] = 0.$$

$$P(|X-Y|<\sqrt{n}) = P(-\sqrt{n} < X-Y < \sqrt{n}) =$$

$$= P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) \le \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$E[X_i - Y_i] = 0, \quad V[X_i - Y_i] = V[X_i] + V[Y_i] - 2cov(X_i, Y_i)$$

$$E[X_i \cdot Y_i] = 0, \quad cov(X_i, Y_i) = -\frac{1}{4}$$

$$V[X_i - Y_i] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 1.$$

$$P(|X-Y| \le \sqrt{n}) \approx \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{n}} - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) =$$

משפט הגבול המרכזי

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 1 - 2\Phi(-1) = 1 - 2\cdot 0.15865$$

ב).

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$P\left(\left|\frac{X-Y}{n} - E[X_i - Y_i]\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$E[X_i - Y_i] = 0$$

$$P\left(\left|\frac{X-Y}{n}\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{לכן}$$

~~לכן סדרה~~

לכן מ"מ $\frac{X-Y}{n}$ מתכנס ל-0 בהסתברות

ולא ל-$\frac{1}{2}$

טענה לא נכונה.