תירגול 2

תזכורת:

לכל בניה הסתברותית יש 3 מרכיבים.
מרחב המדגם, אוסף מאורעות, פונקצית הסתברות.
מרחב המדגם הוא אוסף כל תוצאות אפשריות של הניסוי. מאורע הוא תת-קבוצה של מרחב המדגם.
פונקצית הסתברות מקיימת 3 האקסיומות הבאות

1. $0 \le P(A) \le 1$, A מאורע
2. $P(\Omega) = 1$, Ω - מרחב המדגם.
3. $A_1, A_2, \dots$ מאורעות זרים בזוגות

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$
- אם Ω סופי, ומניחים שכל התוצאות בו שוות-הסתברות, אז-

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

שאלה 1

קופסה מכילה 3 כדורים: אחד אדום, אחד ירוק ואחד כחול. מוציאים כדור אחד מהקופסה, מחזירים אותו לקופסה ומוציאים שנית כדור אחד. תאר את מרחב המדגם בניסוי זה. תאר את מרחב המדגם בניסוי שבו מוציאים את הכדור בפעם השניה בלי להחזיר קודם לכן את הכדור שהוצא בפעם הראשונה.

פתרון $\Omega_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),$
$(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\Omega_2 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

1 - סדוק
2 - ירוק
3 - כחול

(ב) לקוח הנכנס למחלקת החליפות של חנות כלבו יקנה חליפה בהסתברות 0.22, חולצה בהסתברות 0.3 ועניבה בהסתברות 0.28. הלקוח יקנה חליפה וחולצה בהסתברות 0.11, חליפה ועניבה בהסתברות 0.14, חולצה ועניבה בהסתברות 0.1. הלקוח יקנה את כל 3 הפריטים בהסתברות 0.06. מהי ההסתברות שלקוח -

(א) לא יקנה אף פריט?

(ב) יקנה בדיוק אחד מהפריטים?

פתרון: נגדיר מאורעות A - קונה חליפה
B - קונה חולצה
C - קונה עניבה

$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1-P(A\cup B\cup C) =$ (א)
$= 1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-$
$-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)) = 1-(0.22+0.3+0.28-$
$-0.11-0.14-0.1+0.06) = 0.49$

(ב)

לפחות אחד → בדיוק אחד, בדיוק שניים, בדיוק שלוש
$\underbrace{\text{בדיוק שניים} \quad \text{בדיוק שלוש}}_{\text{לפחות שניים}}$

$P(\text{לפחות אחד}) = P(A\cup B\cup C) = 0.51$

$P(\text{לפחות שניים}) = P((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) =$

$= P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap A\cap C) -$

$- P(A\cap B\cap B\cap C) - P(A\cap C\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap C) =$

$= 0.23$

$P(\text{בדיוק אחד}) = 0.51 - 0.23 = 0.28$

③ טורפים חפיסה רגילה של 52 קלפים. מה״י ההסתברות שארבעת הקלפים הראשונים הם

(א) בעלי ערכים שונים?

(ב) מצורות שונות?

<u>פתרון</u> (א) $\frac{52\cdot 48\cdot 44\cdot 40}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} \simeq 0.7$

(ב) $\frac{52\cdot 39\cdot 26\cdot 13}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} \simeq 0.1$

④ ביד ~~5~~ בת 5 קלפים, המתקבלת מחפיסה טרופה היטב של 52 קלפים, מהי ההסתברות שיש לפחות קלף אחד מכל אחת מארבע הצורות?

<u>פתרון</u>: נסמן ~~ב~~ ב-A את המאורע שביד בת 5 קלפים יש לפחות קלף אחד מכל אחת מארבע הצורות.

$\bar{A}$ - לפחות אחת מארבע הצורות חסרה ביד בת 5 קלפים.

נסמן ב-A_i את המאורע שאין אף קלף מהצורה i בין 5 הקלפים שביד

$i = 1, 2, 3, 4$

לכן $\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

$$P(\bar{A}) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i\cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i\cap A_j\cap A_k) -$$

$$- P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = 4\cdot P(A_1) - \binom{4}{2} P(A_1\cap A_2) +$$

$$+\binom{4}{3} P(A_1\cap A_2\cap A_3) - 0 = \frac{1}{\binom{52}{5}}\Big[4\binom{39}{5} - 6\binom{26}{5} +$$

$$+4\cdot\binom{13}{5}\Big] \approx 0.73625$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.26375$$

או

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{2}\cdot 13^3}{\binom{52}{5}} \approx 0.26375$$

יש לבחור קלף אחד מכל אחת מארבע הצורות = שני קלפים מאותה צורה, וקלף אחד מכל אחת משלוש הצורות השונות ממנה

$\binom{4}{1}$ בחירה של צורה, שממנה יש ב קלפים.

$\binom{13}{2}$ בחירה של שני קלפים

5) בארון 10 זוגות נעליים שונים. בוחרים באופן מקרי 4 נעליים. מהי ההסתברות שנקבל בדיוק זוג אחד של נעליים תואמות?
נקבל שני זוגות?
לא נקבל אף זוג?

<u>פתרון:</u>

$$|\Omega| = \binom{20}{4}$$

$$|A_1| = \binom{10}{1}\cdot\frac{18\cdot 16}{2} \qquad P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{96}{323}$$

$$|A_2| = \binom{10}{2} \qquad P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{323}$$

$$A_3 = \overline{A_1 \cup A_2} \qquad P(A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = \frac{224}{323}$$

(6) מטילים שתי קוביות עד שסכום התוצאות המתקבלות הוא 5 או 7. חשב את ההסתברות לקבל 5 לפני 7.

<u>פתרון</u>

נסמן ב-A_n את המאורע ש-5 מתקבל בהטלה ה-n-ית, ושב-n-1 ההטלות הראשונות לא התקבל 5 או 7.

נסמן ב-B את המאורע ש-5 נקבל לפני 7. לכן

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ מאורעות זרים.

לכן

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{אקס' 3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P(A_i) = \frac{26^{i-1} \cdot 4}{36^i}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{26^{i-1} \cdot 4}{36^i} = \frac{4}{36} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{26}{36}} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{36}{10} = 0.4$$

7. בוחרים באופן מקרי תת-קבוצה (אולי ריקה)
מהקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ לפי הכלל הבא: עבור
כל איבר מטילים מטבע: אם התקבל "עץ"
אז האיבר שייך לתת-הקבוצה, אחרת - לא.
לאחר שתת הקבוצה נבחרה, בוחרים
לפי אותו תהליך תת-קבוצה שניה.
לפי תהליך המתואר בוחרים K תתי-קבוצות.
מצא את ההסתברויות של מאורעות הבאים:
(א). כל תתי-קבוצות אלה זרות
(ב) כל תתי-קבוצות אלה זרות בזוגות
(ג) חיתוך כולל בדיוק M איברים
(ד). איחוד כולל בדיוק M איברים
(ה) איחוד אינו כולל M איברים מסוימים.

פתרון:

$$A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k=\emptyset$$

(א) $$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\left(\frac{2^k-1}{2^k}\right)^n$$

$$|\Omega|=2^{k\cdot n}$$

$$|A|=(2^k-1)^n$$

(ב). לדוגמה: אם $2\in A_1$
אז $2\notin A_2,A_3,\dots,A_k$
מס׳ i יכול להיות או בין A_1 או A_2 או ..., או ב-A_k
או מס׳ i לא שייך לאף קבוצה.
לכן עבור מס׳ i יש $(K+1)$ אופציות

$$\underbrace{100\dots0}_{K}$$ סדרה באורך

$01..0$

תשובה

$$\frac{(k+1)^n}{2^{kn}}$$

(ג). $\binom{n}{m}$ בחירה של m איברים שיהיו בחיתוך
n-m מספרים נשארו שלא בחיתוך לכן
$(2^k-1)^{n-m}$

תשובה:
$$\frac{\binom{n}{m}\cdot(2^k-1)^{n-m}}{2^{kn}}$$

(ד). $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$\binom{n}{m}$ - m איברים שבאיחוד

$$\frac{\binom{n}{m}\cdot(2^k-1)^m}{2^{k\cdot n}}$$

(ה). כעת בחירה לא מתוך קבוצה של n איברים
אלא מתוך קבוצה בת M איברים מסויימים

$$\frac{1}{2^{k\cdot M}}$$