

3 תרגום

(1) הוכחה - ע"י ע"י בואל

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \dots \cup (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)\right)$$

$$= P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \dots + P(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

כיוון
כיוון

$A_2, A_2 \setminus A_1, \dots$

$$+ \dots + P(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \subseteq A_n \quad \forall n$$

(2) מהי ההסתברות שסיפרה 5 של מופ'ים

בשר נתון ע"י מופ'ים a_1, a_2, a_3, \dots ?

פירוק

מבין המופ'ים A_i - הסיפרה "5" לא

מופ'ה עד למקום ה- i (כולל i).

לכן ההסתברות המיוקרת היא

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots)$$

יש לה כ"ו

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

זוהי סדרה יורדת $(A_n)_{n=1}^{\infty}$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$$

הסתברות מות'ל

שאלת חזרה:

תוק הכפל

נוסחה ההסתברות השלמה
נוסחה ב"ס

הדברה ית'ו A ו-B שני מאורעות כך ש $P(B) > 0$

ההסתברות המות'ל של A כפול ית'ו
שהמאורע B תרחש (תק' צוק, ההסתברות
של A בתנאי B) גמולן ב $P(A|B)$ והיא
נית'ת ע'

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

תוק הכפל!

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

נוסחה ההסתברות השלמה:

A_1, A_2, \dots, A_n מאורעות זרים כוללת (תנאי הסתברות
ת'ובי'ל) ש'חודק ה'וס ז, ז, ז

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

נוסחה ב"ס:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

שאלה 1 מצא סה ההסתברות שבחוק ת'ובי'ל

של 20 ע'ים יש לפחות ש'שה סנטי'ק

ש'ולקו במרס, בתנאי ע'ים ש'תק מה-20

הש'ה ב'ולן נ'ולק במרס

פתרון: A - בחוק הקבוצה יש לפחות ש'שה
ש'ולקו במרס

B - ע'ים ש'תק לפחות מ'ת'ובי'ל נ'ולק

במרס

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1 - P(\bar{A})}{1 - P(\bar{B})}$$

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{11}{12}\right)^{20} + 20 \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{19} + \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{18}$$

$$P(\bar{B}) = \left(\frac{11}{12}\right)^{20}$$

② בסיכון סטודנטים הלך בן 3 קומות עם 4 זיכרון
 בכל קומה, הפורגט את המפתח כיווני הכוונות.
 בכל זיכרון מוצא את סטודנטים אחרים. למה זיכרון
 לפגוש במקרה הכוונות לפגוש. מהם הם ההסתברות
 הכוללת

(א) למה הזיכרון מביא בקומות שונות

(ב) היותה קומות זיכרון אחר שזיכרון פונה צפונה

(ג) נתון כי אדם בקומה אחר בקומה הנכשלת.

מה ההסתברות לפגוש מביא בקומות

שונות?

פתרון: (א) נתון A_1 - זיכרון אחר בקומה שונה
 מביא א

A_2 - זיכרון אחר בקומה שונה

מביא זיכרון אחר זיכרון

A - לפגוש מביא בקומות שונות

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) =$$

$$= \frac{8}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{32}{110}$$

(ב) B - זיכרון אחר בקומה שונה צפונה

B_i - זיכרון אחר בקומה צפונה

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = 1 - P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) =$$

$$= 1 - P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2 | \bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_3 | \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) =$$

5. מודל פשוט למצוי מסמך שווה מיליון שקלים
 האורך (בשקט או יום) מתר יתה כמו מסמך
 האורך היוק בהסתברות p . עק מסמך האורך
 יום ג-א בליו, חשב את ההסתברות
 שיהיה יום ה יוםק מאחר יותר.

פתרון: נסמן ב- p_n - ההסתברות שמסמך שווה
 יתה יום ה יוםק מאחר יותר

יותר

p_{n-1} - הסתברות לפק ש'יום ו-ח יוםק

מאחר יותר

$1-p_{n-1}$ - הסתברות לפק ש'יום ו-ח יוםק

מאחר יותר

$$p_n = p_{n-1} \cdot p + (1-p) \cdot (1-p_{n-1})$$

הסתברות
ש'יום

$$p_0 = 1.$$

$$p_n = (2p-1) \cdot p_0 + ((2p-1)^{n-1} + (2p-1)^{n-2} + \dots + 1) \cdot (1-p)$$

$$= (2p-1)^n + \frac{(2p-1)^n - 1}{2p-1-1} \cdot 1-p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2p-1)^n$$

$n \geq 0.$

6. מיליון שקלים מתן הקין ה פנאק. מה ההסתברות

ש"ע" לא יתקבל 3 פנאק ברצ'פוט? (מזל)

נוסחה דיקורטביה) חשב את ההסתברות עבור

$$n=5$$

פתרון: נסמן ב- p_n את ההסתברות ש-ח ה'יום

ש'מתן הקין, יום לא יתקבל 3 פנאק ברצ'פוט

| | |
|------|--|
| פ'יו | |
| פ'פ | |

$P_n = P\left(\begin{array}{c|c} \text{ע"ל} & \text{הפסק} \\ 3 & \text{האסורה} \\ \text{פג"מ} & \text{קבל} \\ \text{ה'צ"ב} & \text{ע"ל} \end{array} \right) \cdot P(\text{ע"ל}) +$

$+ P\left(\begin{array}{c|c} \text{ע"ל} & \text{הפסק} \\ 3 & \text{האסורה} \\ \text{פג"מ} & \text{פ"ל} \\ \text{ה'צ"ב} & \text{פ"ל} \end{array} \right) \cdot P(\text{פ"ל})$

$P\left(\begin{array}{c|c} \text{ע"ל} & \text{הפסק} \\ 3 & \text{האסורה} \\ \text{פג"מ} & \text{ע"ל} \\ \text{ה'צ"ב} & \text{ע"ל} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \cdot P_{n-2} + \frac{1}{2} \cdot P\left(\begin{array}{c|c} \text{ע"ל} & \text{הפסק} \\ 3 & \text{האסורה} \\ \text{פג"מ} & \text{ע"ל} \\ \text{ה'צ"ב} & \text{ע"ל} \end{array} \right) \cdot P(\text{ע"ל, ע"ל}) =$

$= \frac{1}{2} \cdot P_{n-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_{n-3}$

$P_n = \frac{1}{8} P_{n-3} + \frac{1}{4} P_{n-2} + \frac{1}{2} P_{n-1}$

$P_0 = P_1 = 1$

$P_5 = \frac{3}{4}$