

תורת הסדר 4

עקר 1 סדר-המשותף של משתנים

משותפים A, B במובן - תלויים אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

משותפים A_1, A_2, \dots, A_n במובן אם

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_r})$$

$2 \leq r \leq n$

משפט

① תלויים n משתנים אפשריים; המוצא i

מתקבל בהסתברות P_i , לכל $i=1, 2, \dots, n$,

ומתקיים $\sum_{i=1}^n P_i = 1$. השני מוצא במובן -

תלויים על תלויים, מהי ההסתברות שבפנים
השני המתקבל מוצא מכלל אפשרות?

פתרון: דרך 1

נסמן A - במצבה הרלוונטית על תלויים

המתקבלים מוצא קצרה מצד שהמתקבלים

במצבה השנייה עליו.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(\text{במצבה } i, \text{ בהצורה } j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P_i \cdot P_j$$

$$1 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sum_{j=1}^n P_j = \sum_{i=1}^n P_i^2 + \sum_{i \neq j} P_i \cdot P_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n P_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P_i \cdot P_j$$

$$P(A) = 1 - \sum_{i=1}^n P_i^2$$

צרכי 2! : 5 מספרים מאורגן

$$A = \{i < j\}$$

$$B = \{i > j\}$$

$$C = \{i = j\}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

מסימטריה בין המזלגות הניסוי

$$P(A) = P(B)$$

$$2P(A) + P(C) = 1$$

$$P(A) = \frac{1 - P(C)}{2} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i^2}{2}$$

(2) הוכח כי אם מהסגולת הבאה, אז הבטל
 גם קבוצת הצדדים.

(א) $P(A)$ בלתי אפסית B - $B-1$ בלתי אפסית C - C
 $B \cup C = A$ בלתי אפסית

(ב) $P(A)$ בלתי אפסית B - $B-1$ בלתי אפסית C - C
 $B \cup C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$!

פתרון:

(א) נתון: ניסוי: מספרים 2 קוביות
 נתון A - סכום המוצגות הוא 7
 B - המוצגות בקוביה הראשונה
 אינה 4.

C - המוצגות בקוביה השנייה
 אינה 3.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(B) = P(C) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36} \quad P(B \cap C) = \frac{25}{36}$$

$$B \cap C = \Omega \setminus \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

$$P(A \cap (B \cup C)) = \frac{5}{36}$$

$$P(B \cup C) = 1 - P(\bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{35}{36}$$

$$P(A \cap (B \cup C)) \neq P(B \cup C) \cdot P(A)$$

לכן הסתנה שיהיה נכונה.

$$P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \quad (2)$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$

$$= \underbrace{P(A) \cdot P(B)}_{\wedge \text{ "A, B"}} + \underbrace{P(A) \cdot P(C)}_{\wedge \text{ "A, C}} - 0 =$$

$$= P(A) (P(B) + P(C)) = P(A) \cdot \underbrace{P(B \cup C)}_{\text{B, C זרים}}$$

(3) יהיו A, B מאורעות שלם אחד מהם אירועים הסתברות מובטח. לפי שמה מן הסתברות

נתן אם היא

(i) נכונה אמר

(ii) שאינה אמר

(iii) יכונה למה ק"ק

(ד) אם A ו-B זרים, אז הם בהתאמה

(ה) אם A ו-B בהתאמה - אז הם זרים

(ו) $P(A) = P(B) = 0.6$ (ד)

(ז) $P(A) = P(B) = 0.6$ (ה)

$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$ (E) פתרון:

$P(A) > 0$ כי

$P(B) > 0$

עד'ה אמ'ר?

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) > 0$ (ב)

עד'ה אמ'ר?

$P(A) + P(B) = 1.2 > 1$ (ד)

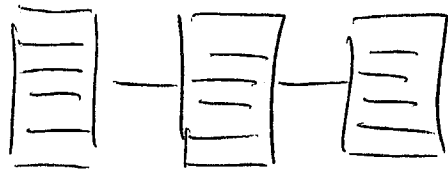
עד'ה אמ'ר?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$ (ג)

$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0.84$

יכול להיות

(4) תוויה משתנה מורכבת מ- n מפסק'ק המתוברים במקביל. כל מפסק'ק זקוק בהסתברות p ללש גורם המפסק'ק אחרים. התנאי כולו מורכב משלוש תוויות כלשהן המתוברים בסדר מה' ההסתברות שיש מליכות מתנאי?



פתרון

A_i - מליכות בתוויה ה- i

B - מליכות במניין

$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ $P(B) = ?$

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$

$P(A_1) = P(\bigcup_{i=1}^n E_i)$

E_i - המפסק'ק ה- i בתוויה הפעולה זקוק

$$P(E_i) = p \quad \text{כאשר } 1 \leq i \leq n$$

$$P(A_1) = P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{E}_i\right) =$$

$$= 1 - P(\bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_2) \cdots P(\bar{E}_n) = 1 - (1-p)^n$$

נושא משה + תלמוד

על האורחות E_1, \dots, E_n

$$P(B) = [P(A_1)]^3 = [1 - (1-p)^n]^3 \quad \text{כאשר}$$

שאלה 2 מטרה מקרי בקרי

• פונקציה ממית, המוגדרת על קטגוריה הכוללת אוסף
האפשרות של ימי מקרי, נקרא מטרה

מקרי
• מטרה מקרי מתקבלת מה סוכים או כן או לא
של נרכיב אפשריים נקרא מטרה מקרי

• פונקציות ההסתברות של מטרה מקרי בקרי
 X נקרא X על ידי X המטרה
 X על ההסתברות

$$p(x) = P(X=x)$$

• פונקציות ההסתברות (המסתברות):

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} P(X=x)$$

שאלה:

① בכך ישנם M כדורים לבנים ו- M כדורים
שחורים. מציבים מהכד בקופסא כדור אחד
כדור עם שתי קופסאות כדור שחור. הבחירה
היא על הקופסאה מהי ההסתברות שיש

3. נתונה פונקציה של המספרים X

$$f(x) = \frac{5-x}{10} \quad x=1,2,3,4$$

א. חשבו את הפונקציה f (א)

$F_X(t)$ (ב)

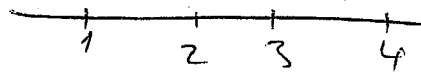
$P(2 \leq X \leq 2)$ (ד)

פתרון:

$$f(x) = \frac{5-x}{10} > 0 \quad (א)$$

$$x=1,2,3,4 \quad f > 0$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$



(א)

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 0.4 & 1 \leq t < 2 \\ 0.4 + 0.3 = 0.7 & 2 \leq t < 3 \\ 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9 & 3 \leq t < 4 \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

$$P(2 \leq X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = 0.7 \quad (ד)$$