תירגול 5

התפלגויות מיוחדות
של משתנה מקרי בדיד

1. $X \sim U[a,b]$

$$P(X=k)=\frac{1}{b-a+1}$$

$k=a, a+1, \dots, b$

2. $X \sim B(n,p)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$k=0,1,\dots,n$

3. $X \sim G(p)$

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1} \cdot p$$

$k=1,2,\dots$

4. $X \sim H(n,a,b)$

$$P(X=k)=\frac{\binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

$k=0,1,\dots,n$

5. $X \sim P(\lambda)$

$$P(X=k)=e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$k=0,1,2,\dots$

שאלות

1) בבריכה 200 דגים, שמהם 40 הם דגי רקק.
לצורך מחקר חשוב על דגי רקק מוציא הביולוג
שלושה דגים בזה אחר זה לבדיקה.
נסמן ב-X מספר דגי הרקק שנבדקו.
מצא את פונקצית ההסתברות של המ"מ X
(א) כאשר הדג שנבדק הוחזר מיד (ח') לבריכה
(ב) כאשר הדג שנבדק לא הוחזר לבריכה

פתרון: (א) $X\sim B(3,p)$, $p=\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{3-k}$$
$k=0,1,2,3$

(ב) $X\sim H(3,40,200)$

$$P(X=k)=\frac{\binom{40}{k}\cdot\binom{160}{3-k}}{\binom{200}{3}}$$
$k=0,1,2,3$

② סוללת יורה באוניה n פגזות טורפדו שכל אחת פוגעת באוניה בהסתברות p ללא תלות בפגזות אחרות. באוניה יש 4 תאים. האוניה תטבע אם לפחות שני תאים נפגעים. פגזה הפוגעת באוניה "בוחרת" בכל אחד מהתאים בהסתברות שווה. מצא את ההסתברות שאוניה תטבע.

פתרון: X - מס' תאים שפגעו
Y - מס' הפגעות באוניה

$Y\sim B(n,p)$

$$P(\text{האוניה תטבע})=1-P(\text{האוניה לא תטבע})=$$
$$=1-P(Y=0)-P(X=1,Y>0)=1-(1-p)^n-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}P(X=1/Y=k)\cdot P(Y=k)=$$
$$=1-(1-p)^n-\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{4^k}\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=$$
$$=1-(1-p^n)-4\left(1-\frac{3p}{4}\right)^n+4\cdot(1-p)^n=$$
$$=1+3(1-p)^n-4\left(1-\frac{3}{4}p\right)^n$$

③ במניית חלקיקי α נמנים במשך 10000 שניות 2500 חלקיקים בממוצע. מצא את ההסתברות שלפחות 3 חלקיקים יספרו במשך 10 שניות.

<u>פתרון:</u> X – מס' החלקיקים שיספרו במשך 10 שניות

$$X\sim P(\lambda)$$

$$\lambda=\frac{2500\cdot 10}{10\,000}=\frac{5}{2}$$

$$P(X\geq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$$

$$=1-e^{-2.5}\sum_{i=0}^{2}\frac{2.5^i}{i!}$$

④ מספר האנשים X הפונים ללשכת המידע במשך שנה אחת מתפלג פואסונית עם פרמטר λ. כל אחד מהפונים מקבל תשובה נכונה בהסתברות p ותשובה שגויה בהסתברות $q=1-p$. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר האנשים Y המקבלים תשובה שגויה.

<u>פתרון:</u> בתנאי שמספר האנשים X הפונים ללשכת המידע שווה ל-k, מספר האנשים Y המקבלים תשובה שגויה מתפלג בינומית עם פרמטרים k ו-q.

$$Y|_{X=k}\sim B(k,q)$$

$$P(Y=s)\underset{\text{הסתברות שלמה}}{=}P(Y=s|X=0)\cdot P(X=0)+P(Y=s|X=1)\cdot P(X=1)+\ldots=$$

$$=\sum_{k=s}^{\infty}P(Y=s|X=k)\cdot P(X=k)=$$

$$=\sum_{k=s}^{\infty}\binom{k}{s}\cdot p^{k-s}\cdot q^{s}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}q^s}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}\frac{p^{k-s}\lambda^k}{(k-s)!}=e^{-\lambda}\cdot\frac{(\lambda q)^s}{s!}\cdot\sum_{k-s=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{k-s}}{(k-s)!}=$$

$$=e^{-\lambda q}\cdot\frac{(\lambda q)^s}{s!}\Rightarrow Y\sim P(\lambda q)$$

5. מכונה מכילה 1000 רכיבים אלקטרוניים. פגם יכול להופיע בכל רכיב בהסתברות 0.005. מצא את ההסתברות שבמכונה יש בדיוק 3 רכיבים פגומים.

<u>פתרון</u> נסמן ב-X את מספר הרכיבים הפגומים במכונה.

$X \sim B(1000, 0.005)$, $P(X=3)$-?

אם $X \sim B(n,p)$ אזי כאשר n גדול ו-p קטן ההסתברות הבינומית $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ ניתן לקירוב ע"י ההסתברות פואסונית $e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ כאשר $p\cdot n=\lambda$

$\lambda = 1000\cdot 0.005 = 5$ $\quad P(X=3)=e^{-5}\cdot\frac{5^3}{3!}$

6. מטבע מוטל עד אשר מתקבל "עץ" בפעם ה-m. מצא את ההסתברות שמספר ההטלות עד לכך (כולל) שווה ל-k, אם המטבע אינו הוגן וההסתברות לקבלת "עץ" שווה ל-p.

<u>פתרון</u> $P(X=k)=\binom{k-1}{m-1}\cdot p^m\cdot(1-p)^{k-m}$

$k=m, m+1, \dots$

7. כד מכיל שני כדורים לבנים ו-4 שחורים. מוציאים מהכד 3 כדורים ללא החזרה. אם כדור אחד לבן ושניים אחרים שחורים, מסיימים את הניסוי. אחרת, מחזירים את הכדורים לכד וממשיכים את הניסוי עד לקבלה בפעם הראשונה של בדיוק כדור אחד לבן ושניים שחורים. נסמן ב-X את מס' ההוצאות, וב-Y את מס' הניסויים בהם כל 3 הכדורים שחורים.

(א) האם מ"מ X הוא מ"מ היפרגאומטרי?

(ב). $P(Y \ge 1)$?

(ג) האם המאורעות $\{X=1000\}$ ו-$\{Y=500\}$ בלתי תלויים.

<u>פתרון:</u>

(א). $X \sim G(p)$

נגדיר Z - מס' הכדורים הלבנים בהוצאת 3 כדורים מהכד.

$$p = P(Z=1) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}$$

(ב). $P(Y \ge 1) = 1 - P(Y=0)$

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot P(Y=0 \mid X=k)$$

$$Y|_{X=k} \sim B(k-1, p_1)$$

p_1 - הסתברות להצלחה $= P(\text{כל הכדורים שחורים} \mid eee \cup \ell\ell e) =$

$$= P(Z=0 \mid Z=0 \cup Z=2) = \frac{P(Z=0)}{P(Z=0)+P(Z=2)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k-1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$P(Y \ge 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

או $Y = Y' - 1$

כאשר Y' - מס' הניסויים עד לקבלה בפעם הראשונה שני כדורים שחורים ואחד לבן בתנאי שיש רק שתי אופציות בניסוי אחד; או כל הכדורים

שחורים או כדור אחד לבן ושניים שחורים.

$$Y' \sim G(p_2)$$

$$p_2 = P(Z=1 \mid Z=0 \cup Z=1) = \frac{P(Z=1)}{P(Z=0)+P(Z=1)} = \frac{3}{4}$$

$$P(Y=0) = P(Y'-1=0) = P(Y'=1) = \frac{3}{4}$$

(ג). $P(Y=500 \mid X=1000) = \binom{999}{500}\left(\frac{1}{2}\right)^{999}$

$$P(Y=500) = P(Y'=501) = \left(\frac{1}{4}\right)^{500} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\binom{999}{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{999} = 0.25225$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{500} \cdot \frac{3}{4} \approx 7 \cdot 10^{-302}$$

$$P(Y=500 \mid X=1000) \neq P(Y=500)$$

$$P(X=1000) > 0$$

לכן מאורעות תלויים.

8. שני שחקנים מטילים מטבע בתור אחד אחרי השני עד שיתרחש בפעם הראשונה "עץ". הראשון מתחיל. המשחק מסתיים כאשר יתרחש "עץ".
השחקן המסיים את המשחק מנצח ומקבל פרס בסך n ש"ח, כאשר n הוא מס' ההטלות במשחק.

X - הרווח של שחקן הראשון

Y - הרווח של שחקן השני

(א). מה ההסתברות שינצח השחקן הראשון? השחקן השני?

(ב). מצא את פונקצית ההסתברות של המ"מ X, של המ"מ Y?

פתרון A - השחקן הראשון ינצח

B השחקן השני ינצח

$$P(A)=P(X=1)+P(X=3)+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}P(Z=2k+1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\frac{2}{3}$$

$$P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

(ב)

$$\begin{cases}P(X=0)=\frac{1}{3}\\ P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}, & k=1,3,5,\dots\end{cases}$$

$$\begin{cases}P(Y=0)=\frac{2}{3}\\ P(Y=s)=\left(\frac{1}{2}\right)^{s}, & s=2,4,6,\dots\end{cases}$$

9. ניסוי מורכב משני שלבים. בשלב הראשון מטילים מטבע הוגן 6 פעמים. בשלב השני מקופסה המכילה 3 כדורים לבנים ו-3 שחורים בוחרים ללא החזרה מספר כדורים השווה למס' העצים בהטלות המטבע. נסמן ב-X את מס' הכדורים הלבנים שהוצאו. מצא את פונקציית ההסתברות של המ"מ X.

פתרון: נסמן ב-Y את מס' העצים ב-6 הטלות המטבע

$$X|_{Y=k}\sim H(6,3,k),\quad Y\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$$

ערכים אפשריים של מ"מ X: 0, 1, 2, 3

$$P(X=0)=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

$$P(X=1)=\sum_{k=1}^{4}\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{k-1}}{\binom{6}{k}}\cdot\binom{6}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$P(X=2)=\sum_{k=2}^{5}\binom{3}{2}\binom{3}{k-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$P(X=3)=\sum_{k=3}^{6}\binom{3}{3}\cdot\binom{3}{k-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$