תירגול 6

תוחלת של משתנה מקרי

בדיד

- $E[X]=\sum_{x} x\cdot P(X=x)$
- $E[f(X)]=\sum_{x} f(x)\cdot P(X=x)$
- $E[X_1+\dots+X_n]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$
- $E[aX]=aE[X]$ a קבוע

  $E[b]=b$ b קבוע
- $E[X]=\frac{a+b}{2} \Leftarrow X\sim U[a,b]$
- $E[X]=n\cdot p \Leftarrow X\sim B(n,p)$
- $E[X]=\frac{1}{p} \Leftarrow X\sim G(p)$
- $E[X]=\frac{na}{a+b} \Leftarrow X\sim H(n,a,b)$
- $E[X]=\lambda \Leftarrow X\sim P(\lambda)$

שאלות

① קופסה מכילה 3 קלפים המסומנים ב- 1,2,3, אשר נשלפים אחד אחרי השני ללא החזרה. יהי X המשתנה המקרי השווה למספר ההתאמות בין סימני הקלפים ומיקומם בתור ההופעה. מצא את פונקצית ההסתברות ואת פונקצית

התפלגות של המ"מ X. מצא את $E[X]$.

פתרון: הערכים האפשריים של המ"מ X: $0, 1, 3$

$$P(X=0) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3!}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1/3, & 0 \le t < 1 \\ 5/6, & 1 \le t < 3 \\ 1 & t \ge 3 \end{cases}$$

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

ב. מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ בוחרים מספרים אחד אחרי השני עם החזרה עד אשר כל אחד מהם יופיע לפחות פעם אחת. מצא את תוחלת מספר הדגימות הנדרש.

פתרון: נגדיר מ"מ X כמספר הניסויים עד לקבלת מספר i-י חדש $(i=1, 2, \dots, n)$, אז

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

לדוגמה:

$\{1, 2, 3\}$ $\quad 111221113$

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 3$$
$$X_3 = 5$$
$$X = 9$$

$$E[X_1+\dots+X_n]=E[X_1]+\dots+E[X_n]$$

$$E[X_1]=1 \quad \Leftarrow \quad X_1=1$$

$$E[X_2]=\frac{n}{n-1} \quad \Leftarrow \quad X_2\sim G\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

....

$$E[X_i]=\frac{n}{n-i+1} \quad \Leftarrow \quad X_i\sim G\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

....

$$E[X_n]=n \quad \Leftarrow \quad X_n\sim G\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$E[X]=1+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n-2}+\dots+\frac{n}{1}=n\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

③ כל אחת מ-n חיות יכולה לחלות בהסתברות p בלי תלות בחיות אחרות. כדי לגלות את החיה החולה נעשה ניסוי בצורה הבאה: בשלב הראשון נלקח מדגם דם מכל חיה, כל המדגמים מעורבים יחד בכלי אחד והמדגם המעורב נבדק. אם לא נגלה מחלה, מפסיקים את הניסוי. אם מחלה התגלה, אז מכל חיה שוב לוקחים מדגם דם ובודקים אחד אחד. מהו מספר הממוצע של בדיקות דם?

פתרון: יהי X - מס' בדיקות דם.

$$X=1,\ n+1$$

$$E[X]=1\cdot P(X=1)+(n+1)\cdot P(X=n+1)$$

$$\underbrace{P(X=1)}_{\text{אף חיה לא חולה}}=(1-p)^n \qquad \underbrace{P(X=n+1)}_{\text{לפחות חיה אחת חולה}}=1-(1-p)^n$$

$$E[X]=1\cdot(1-p)^n+(n+1)\cdot\left(1-(1-p)^n\right)=$$

$$=n+1-n\cdot(1-p)^n$$

(4) כד מכיל n כדורים הממוספרים ב-$n,\dots,2,1$.
מוציאים את הכדורים מהכד ללא החזרה עד אשר
בשלב מסויים i מוציאים כדור שמספרו שונה מ-i
או עד שמוציאים את כל הכדורים לפי סדר.
יהי X מספר הכדורים שהוצאו. (לדוגמה, אם בשלב
הראשון הוצאנו את כדור מס' 1, ובשלב השני את
כדור מס' 2 ובשלב השלישי כדור מס' 7, הרי הניסוי
יגמר בשלב השלישי ! $X=3$).

מצא

(א). $P(X=5 \mid X\geq 4)$

(ב) הוכח כי $E[X] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

(ג). הוכח כי מ"מ X אינו מתפלג היפרגאומטרי.

פתרון:

$$P(X=5 \mid X\geq 4) = \frac{P(X=5)}{P(X\geq 4)}$$

$$P(X=5) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}$$

$$P(X\geq 4) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$$

או

$$P(X\geq 4) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) =$$

$$= 1 - \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$$

(ב) נגדיר $X_1 = 1$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{כדורים } i-1 \text{ ראשונים במקומם} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \qquad 2\leq i\leq n$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$E[X_i] = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0)$$

$$P(X_1 = 1) = 1$$

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{n}$$

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$\vdots$$

$$E[X] = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots 2}$$

$$1 \le E[X] \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$E[X] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(d). נניח כי $X \sim H(m,a,b)$. לכן

$$X = \max(0, m-b), \dots, \min(m,a)$$

במקרה שלנו $X = 1, 2, \dots, n$

לכן

$$\max(0, \underbrace{m-b}_{\shortparallel}) = 1$$

$$m - b = 1$$

$$m = b + 1$$

$$\min(m, a) = 1$$

$$E[X] = m \cdot \frac{a}{a+b} > \frac{ma}{a+m} \ge \frac{ma}{2\max(a,m)} =$$

$$= \frac{\min(m,a) \cdot \max(m,a)}{2\max(a,m)} = \frac{n}{2}$$

סי'רה.

5) ראובן ושמעון משחקים במשחק הבא. בשלב הראשון, כ"א מהם דוגם מספר מקרי מהתפלגות $U[1,1]$, בשלב השני – מהתפלגות $U[1,2]$, אח"כ מהתפלגות $U[1,3]$, וכן הלאה. המשחק מסתיים כאשר הם מקבלים שני מספרים שונים. נסמן ב-X את מס' שלבי המשחק.

(א) האם $P(X=k \mid X\geq k)=1-\frac{1}{k}$?

(ב) $X-1$ מתפלג פואסונית?

(ג) $E[X]=e-1$?

<u>פתרון:</u> $X_i \sim U[0,i]$ – מס' שדוגם ראובן בשלב ה-i

$Y_i \sim U[0,i]$ – מס' שדוגם שמעון בשלב ה-i.

$$P(X=k \mid X\geq k)=\frac{P(X=k)}{P(X\geq k)}=\frac{P(X_1=Y_1,\dots,X_{k-1}=Y_{k-1},X_k\neq Y_k)}{P(X_1=Y_1,\dots,X_{k-1}=Y_{k-1})}$$

$$=P(X_k\neq Y_k)=1-P(X_k=Y_k)=1-\sum_{h=1}^{k}P(X_i=h,Y_i=h)$$

$$=1-k\cdot\frac{1}{k^2}=1-\frac{1}{k}$$

(ב) $$P(X-1=0)=P(X=1)=0$$

נניח כי $X\sim P(\lambda)$. לכן $P(X=1)=e^{-\lambda}\neq 0$ סתירה.

(ג) $$E[X]=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot\frac{k-1}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}=e$$

⑥ קוביה נזרקת n פעמים.
המ"מ X מוגדר כסכום התוצאות הזוגיות
המ"מ Y מוגדר כסכום התוצאות הקטנות
או שוות ל-3. הסק $E[X]=E[2Y]$?

<u>פתרון</u>

$$X_i = \begin{cases} k, & \text{זוגי} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad 1 \le i \le n$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$y_i = \begin{cases} s, & s = 1,2,3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad 1 \le i \le n$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \left(2\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2n$$

$$E[y] = \sum_{i=1}^{n} E[y_i] = \sum_{i=1}^{n} \left(1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$E[X] = 2\cdot n = 2\cdot E[y] = E[2y]$$