פתרון תירגול 7

(א) ①

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cdot|x|\cdot e^{-x^2}dx =$$

$$= 2a\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = a\cdot\left(-e^{-x^2}\right)\Big|_{0}^{+\infty} = a$$

$$\boxed{a=1}$$

(ב)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot|x|e^{-x^2}dx = 0$$

כי פונקציה $x\cdot|x|\cdot e^{-x^2}$ פונקציה אי-זוגית

② יהי X_A מיקום הנקודה A בקטע $[0,1]$.

$X_A \sim U(0,1)$

$$X=\min\{X_A,\ 1-X_A\}$$

$$F_X(t)=P(X\le t)=P(\min\{X_A,1-X_A\}\le t)=$$

$$=\begin{cases} 0 & t<0 \\ ? & 0\le t<\frac{1}{2} \\ 1 & t\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$P(x\le t)=P(X_A\le t \cup 1-X_A\le t)=P(X_A\le t)+$$

מאורעות זרים עבור $0\le t<\frac{1}{2}$

$$+P(1-X_A\le t)=P(X_A\le t)+1-P(X_A<1-t)=2t$$

$$F_X(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 2t, & 0\le t<\frac{1}{2} \\ 1, & t\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$f_X(t)=F_X'(t)=\begin{cases} 2, & 0\le t\le\frac{1}{2} \\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

③ $X_i \sim exp(\lambda)$ - אורך חיי מנוע $i=1,\dots,M$

$$F_{X_i}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$P(A)=P\left(X_1>\frac{1}{\lambda}\cap X_2>\frac{1}{\lambda}\cap\dots\cap X_M>\frac{1}{\lambda}\right)=\left[P\left(X_1>\frac{1}{\lambda}\right)\right]^M=$$

$$=\left[1-P\left(X_1\le\frac{1}{\lambda}\right)\right]^M=e^{-M}$$

④ (א)

$$\begin{cases}\int_0^1 a\,dx+\int_1^4 b\,dx=1\\ \int_0^1 ax\,dx\ \int_1^4 bx\,dx=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+3b=1\\ \frac{1}{2}a+\frac{15}{2}b=\frac{3}{2}\end{cases}\qquad a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{6}$$

(ב)

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^t f(x)\,dx=\begin{cases}0, & t<0\\ \int_0^t\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}t, & 0\le t<1\\ \int_0^1\frac{1}{2}dx+\int_1^t\frac{1}{6}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(t-1), & 1\le t<4\\ 1, & t\ge 4\end{cases}$$

(ג)

$$P(0.5<X\le 2\mid X>1)=\frac{P(1<X\le 2)}{P(X>1)}=$$

$$=\frac{F_X(2)-F_X(1)}{1-F_X(1)}=\frac{1}{3}$$

(5) X - זמן המתנה

A_1 - הפקידה פנויה

A_2 - הפקידה שותה קפה

A_3 - הפקידה עסוקה עם לקוח אחר

A_4 - מפטפטת בטלפון.

$$F_X(t)=P(X\le t)=\sum_{i=1}^{4}P(X\le t|A_i)\cdot P(A_i)=$$

$$=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ p_1+t\cdot\frac{4p_2+6p_3+3p_4}{120} & , \quad 0\le t<20 \\ p_1+p_3+t\cdot\frac{4p_2+3p_4}{120} & , \quad 20\le t<30 \\ p_1+p_2+p_3+t\cdot\frac{p_4}{40} & , \quad 30\le t<40 \\ 1 & , \quad t\ge 40 \end{cases}$$

(6) (א)

$$f_X(t)=2a\cdot f_{X_1}(t)+\frac{3a}{2}f_{X_2}(t)$$

כאשר $X_1\sim exp(1)$, $X_2\sim exp(2)$

$$f_{X_1}(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\le 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_{X_2}(t)=\begin{cases} 2e^{-t}, & t\le 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$2a+\frac{3a}{2}=1 \Rightarrow a=\frac{2}{7}$$

(ב)

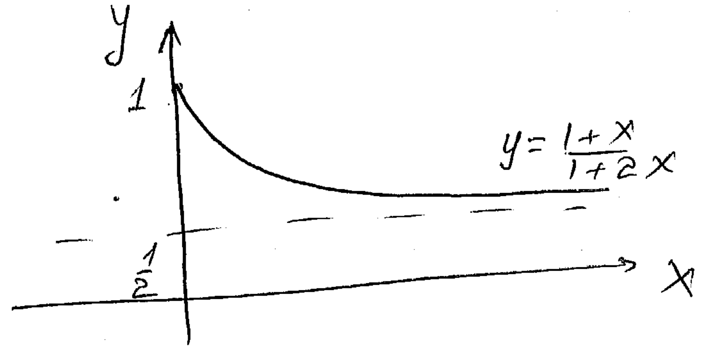
$E[X_1]=1 \Leftarrow X_1\sim exp(1)$

$E[X_2]=\frac{1}{2} \Leftarrow X_2\sim exp(2)$

$$E[X] = 2a\,E[X_1] + \frac{3a}{2}E[X_2] = \frac{4}{7}\cdot 1 + \frac{6}{14}\cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

$X \sim exp(\lambda)$ (7)

$$\frac{1}{2} \le y \le 1 \quad <= \quad y = \frac{1+X}{1+2X}$$



$$F_y(t) = P(y \le t) = \begin{cases} 0, & t < 1/2 \\ P\left(X > \frac{1-t}{2t-1}\right), & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2} \\ e^{-\lambda\left(\frac{1-t}{2t-1}\right)}, & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

$$f_y(t) = F_y'(t) = \begin{cases} \left[e^{-\lambda\left(\frac{1-t}{2t-1}\right)}\right]' & \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$P(\sin X > 0) = P(0 < X < \pi) + P(2\pi < X < 3\pi) + \ldots = \quad (8)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(2k\pi < X < (2k+1)\pi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\pi\lambda}\right)^k - e^{-\pi\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\pi\lambda}\right)^k = \frac{1-e^{-\pi\lambda}}{1-e^{-2\pi\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\pi\lambda}}$$

9. (א) תוחלת אינה קיימת כי

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi} x \frac{x^2}{1+x^4} \, dx$$ מתבדר

(ב)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{3}{\pi} \cdot \frac{x^2}{1+x^6} \, dx =$$

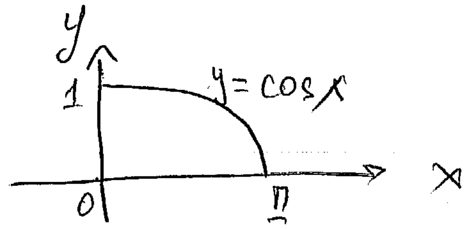
$$= \frac{3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^6} \, dx = 0$$

10. (א)

$$X \sim U\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftarrow$$

פ' התפלגות

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2}{\pi} t & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$F_y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P\left(\arccos t \le x \le \frac{\pi}{2}\right) & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_x\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_x(\arccos t) & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arccos t, & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-\frac{2}{\pi}\arccos t & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1. \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \cdot \sqrt{1-t^2}} & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כי $f_Y(t) = F_Y'(t)$

(ב).

$$E[Y] = E[\cos X] = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} \cdot \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

(ג) עבור $n = 1000$

$$N \sim B\left(1000, P\left(0 \le Y \le \tfrac{1}{100}\right)\right)$$

$$P\left(0 \le Y \le \frac{1}{100}\right) = F_Y\left(\frac{1}{100}\right) - F_Y(0) =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arccos \frac{1}{100} \approx 0.0064$$

נשתמש בקירוב פואסוני למשתנה מקרי בינומי

$$P(N=0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-6.4} \approx 0.002$$

$$N \underset{\text{בקירוב}}{\sim} P(\lambda = 1000 \cdot 0.0064)$$

(11) $Y = [X]$ משתנה מקרי בדיד

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \Leftarrow X \sim \exp(\lambda)$$

הערכים האפשריים של מ"מ Y הם $K=0,1,2,\dots$:

$$P(Y=k)=P([X]=k)=P(k\le X<k+1)=$$

$$=e^{-\lambda k}-e^{-\lambda(k+1)}=e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda})$$