תירגול 8

שונות של משתנה מקרי

- $V[X]=E[(X-\mu)^2]$

כאשר $\mu = E[X]$

- $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$

(1) נתונה פונקצית צפיפות של מ"מ X

$$f_X(t)=\begin{cases}\frac{3}{t^4}, & t\geq 1\\ 0, & t<1\end{cases}$$

נגדיר $Y=\frac{1}{X}$ מצא:

(א) $E[X]$, $V[X]$

(ב) $F_Y(t)$

(ג) $E[Y]$, $V[Y]$

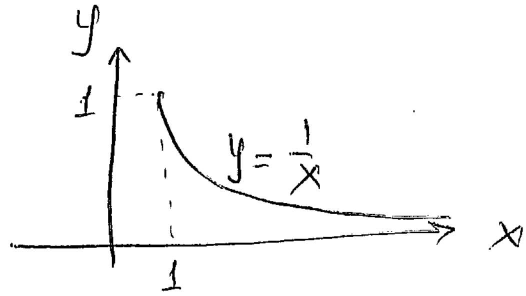
פתרון (א)

$$E[X]=\int_1^{+\infty} x\cdot\frac{3}{x^4}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{3}{x^3}\,dx=\frac{3}{2}$$

$$E[X^2]=\int_1^{+\infty} x^2\cdot\frac{3}{x^4}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{3}{x^2}\,dx=3$$

$$V[X]=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

(ג)



$$F_Y(t) = P(Y\le t) = P\left(\frac{1}{X}\le t\right) = P\left(X\ge \frac{1}{t}\right) =$$

$$= \int_{\frac{1}{t}}^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = t^3, \quad 0\le t\le 1$$

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \begin{cases} 3t^2, & 0\le t\le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E[Y] = \int_0^1 3t^3\,dt = \frac{3}{4}$$ (ד)

$$V[Y] = \int_0^1 3t^4\,dt - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

$X\sim U(0,1)$ (2)

$a\ne 0$, $W=aX+b$

$V[W]$, $E[W]$, $f_W(t)$ מצא

פתרון א. $\underline{\underline{a>0}}$

$$F_W(t) = P(W\le t) = P(aX+b\le t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t<a \\ P\left(X\le \frac{t-b}{a}\right) & a\le t<a+b \\ 1 & t\ge a+b \end{cases} = \begin{cases} 0, & t<b \\ \frac{t-b}{a}, & b\le t<a+b \\ 1 & t\ge a+b \end{cases}$$

$$f_W(t)=F_W'(t)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & a\le t\le a+b\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

ב. $\underline{\underline{a<0}} \Leftarrow W=g(X)$ פונקציה יורדת

$$F_W(t)=\begin{cases}0, & t<a+b\\ P\left(\frac{t-a}{b}\le X\le 1\right), & a+b\le t<b\\ 1, & t\ge b\end{cases}=\begin{cases}0, & t<a+b\\ \frac{a-t+b}{a}, & a+b\le t<b\\ 1, & t\ge b\end{cases}$$

$$f_W(t)=\begin{cases}-\frac{1}{a} & a+b\le t\le b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$V[X]=\frac{(b-a)^2}{12},\ E[X]=\frac{a+b}{2} \quad \underset{\text{כי}}{\Leftarrow}\ X\sim U(a,b)$$

$$E[X]=\frac{1}{2} \quad \Leftarrow X\sim U(0,1)$$

$$E[W]=E[aX+b]=aE[X]+b=\frac{a}{2}+b$$

$$V[W]=V[aX+b]=a^2V[X]=\frac{a^2}{12}$$

3 הוכח כי

(א) $\forall c \quad E[(X-c)^2]\ge V[X]$

(ב) $V[X]\le\frac{(b-a)^2}{4} \Leftarrow P(a\le X\le b)=1$

פתרון:

$$E[(X-c)^2]-V[X]=E[(X-c)^2]-$$
$$-E[X^2]+(E[X])^2=E[X^2]-2c\,E[X]+c^2-$$
$$-E[X^2]+(E[X])^2=(E[X]-c)^2\geq 0 \quad \forall c$$

(ב) הוכחנו כי

$$V[X]\leq E[(X-c)^2]$$

$$a\leq X\leq b \quad \Leftarrow \quad P(a\leq X\leq b)=1$$

ניקח $c=\frac{a+b}{2}$

$$a-\frac{a+b}{2}\leq X-c\leq b-\frac{a+b}{2}$$
$$\frac{a-b}{2}\leq X-c\leq\frac{-a+b}{2}$$
$$|X-c|\leq\frac{b-a}{2}$$
$$|X-c|^2\leq\frac{(b-a)^2}{4}$$
$$E[(X-c)^2]\leq E\left[\frac{(b-a)^2}{4}\right]=\frac{(b-a)^2}{4}$$

(4) נתונות שתי חפיסות קלפים, בכל אחת n קלפים ממוספרים מ-1 עד n. חפיסה אחת מסודרת בשורה לפי סדר עולה וחפיסה השניה מסודרת באופן אקראי מתחת לחפיסה הראשונה. יהי X מספר ההתלכדויות. מצא את $V[X]$.

פתרון: נגדיר

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ההלבבות במקום } i \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \qquad 1 \le i \le n$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$E[X_i] = \sum_x x \cdot P(X_i = x) = 1/n$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$E[X^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] +$$

$$+ \sum_{i \neq j} E[X_i \cdot X_j]$$

$$X_i \cdot X_j = \begin{cases} 1, & \text{ההלבבות במקום } i \text{ וגם במקום } j \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E[X_i X_j] = P(X_i X_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$E[X^2] = 1 + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1.$$

5. מטילים n מטבעות ~~סימטריים~~ הוגנות ומסלקים
את כל המטבעות בהן יצא פלי. לאחר
מכן מבצעים סבב שני של הטלות ומטילים את
כל המטבעות שנשארו. נסמן ב-X את

מספר העצים שהתקבלו בסבב ההטלות השני.
מצא $E[X]$, $V[X]$.

<u>פתרון:</u> אם מטילים את n המטבעות פעמיים כל אחת,
אז מספר המטבעות שבהן יופיע עץ פעמיים
הוא זהה למ"מ X. מכאן ברור כי

$$X \sim B(n, \tfrac{1}{4})$$

לכן $E[X]=\frac{n}{4}$, $V[X]=n\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$.

<u>דרך ישירה</u>

נסמן ב-Y את מספר העצים שהתקבלו בסבב
ההטלות הראשון. אז $Y \sim B(n,\frac{1}{2}) \Leftarrow E[Y]=\frac{n}{2}$

$$E[X]=\sum_k k\cdot\left(\sum_s P(X=k|Y=s)\cdot P(Y=s)\right)$$

כי

$$P(X=k)=\sum_s P(X=k|Y=s)\cdot P(Y=s)$$

באופן כללי

$$E[X]=\sum_k k\left(\sum_s P(X=k|Y=s)\cdot P(Y=s)\right)=$$

$$= k_1\cdot\left(\sum_s P(X=k_1|Y=s)\cdot P(Y=s)\right)+\dots+k_n\left(\sum_s P(X=k_n|Y=s)\cdot\right.$$

$$\left.P(Y=s)\right)=P(Y=s_1)\cdot\sum_k k\cdot P(X=k|Y=s_1)+$$

$$+P(Y=s_2)\cdot\sum_k k\, P(X=k|Y=s_2)+\dots+P(Y=s_m)\cdot\sum_k k\cdot P(X=k|Y=s_m)$$

$$=\sum_s P(Y=s)\cdot E[X|Y=s]$$

כאשר

$$E[X|Y=s]=\sum_k k\cdot P(X=k|Y=s)$$

נשים לב כי $X|Y=s \sim B(s,\frac{1}{2})$ - מס' העצים שהתקבלו
בסבב ההטלות השני בהתנאי שבסבב ההטלות הראשון
התקבלו s עצים. לכן $E[X|Y=s]=\frac{s}{2}$
הוכחנו כי

$$E[X]=\sum_{s=0}^{n} P(Y=s)\cdot E[X|Y=s] =$$

$$=\sum_{s=0}^{n} \frac{s}{2}\cdot P(Y=s)=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} s\cdot P(Y=s)=$$

$$=\frac{1}{2}E[Y]=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{n}{4}$$